

CGE 分析入門

第4章：MCP (Mixed Complementarity Problem)
の解き方*

武田史郎†

Date: 2017/04/06,

Version 1.2

目次

1	導入	2
2	MCP の例：部分均衡モデル	2
2.1	企業	2
2.2	消費者	5
2.3	市場均衡	6
2.4	均衡条件（まとめ）	7
3	MCP の定義	7
3.1	非線形の連立方程式	8
3.2	MCP の一般的な定義	8
3.3	変数に非負制約だけあるケース	8
4	GAMS のコード	8
4.1	コードの解説	9
4.2	シミュレーション結果	14
4.3	変数の Marginal 値の意味	15
5	補足説明	16
5.1	式に変数に対応させない場合	16
5.2	式で不等号を利用しない場合	17
5.3	式に変数に対応させない場合	17
	参考文献	18
6	問題	18
7	履歴	19

*ファイルの配布場所: <http://shirotakeda.org/ja/research-ja/cge-howto.html>†京都産業大学経済学部, Website: <http://shirotakeda.org/ja/>

1 導入

今回の内容について

- 第3章では GAMS で連立方程式を解く問題を扱った。第3章では、連立方程式を解く問題は GAMS では「MCP (Mixed complementarity problem)」というタイプの問題になると説明した。
- 「MCP = 連立方程式を解く問題」と考えても大きな間違いではないが、厳密には異なっている。GAMS で CGE モデルを解く手法を深く理解するには、MCP がどのような問題で、GAMS でその MCP がどのように扱われるかを正確に理解しておくのが望ましい。
- 第4章では MCP とはどのようなタイプの問題で、それを GAMS で解くにはどのようにプログラムを記述するかを説明する。

2 MCP の例：部分均衡モデル

詳しい説明は後に廻すとして、まず直観的に MCP の説明をしておこう。例として、完全競争市場を仮定した部分均衡モデルにおいて均衡を求めるというケースを考える。完全競争市場+部分均衡という仮定より、企業側（供給側）の行動は供給曲線、消費者側（需要側）の行動は需要曲線で表現される。これを表したのが図1である。供給曲線と需要曲線の交点において均衡価格と均衡の数量が決定される。数式では需要と供給が等しくなるように価格が決まるという条件として表現できる。これが部分均衡モデルにおいてごく普通に想定されるケースである。

しかし、実際には図1のように供給曲線と需要曲線がきれいに交わるとは限らず、図2のようなケースも考えられる。図2のパターン B は供給曲線が需要曲線よりも非常に高い位置にあるというケースであり、均衡価格は正になるが、均衡供給量・需要量はゼロとなる。パターン C は逆に供給曲線が需要曲線に比べ非常に低い位置にあるというケースであり、均衡価格が0となり、均衡において超過供給が発生する。もしこれらのパターンが実現するとしたら、単純な「需要=供給」という条件では均衡を求めることはできない。

事前に図1のパターン A のケースになることがはっきりしていれば簡単であるが、シミュレーションによって均衡を計算するような場合にはパターン B やパターン C となるケースを事前には排除できない場合がある。パターン B やパターン C のようなケースも可能性として含んだ形で均衡条件を記述するのが MCP である。上のような状況は部分均衡モデルに限らず、一般均衡モデルにもよく現れることであり、CGE 分析でもこの MCP の表現が出てくる。以下では上の問題を数式で導出し、それを GAMS で解く手順について解説していく。

2.1 企業

まず企業側を考える。企業はプライステイカーとして行動し、利潤最大化を目指して生産量を決定すると仮定する。企業の費用は次のように表されているとする。

$$c(q) = \alpha q + \frac{1}{2} \beta q^2 \quad (1)$$

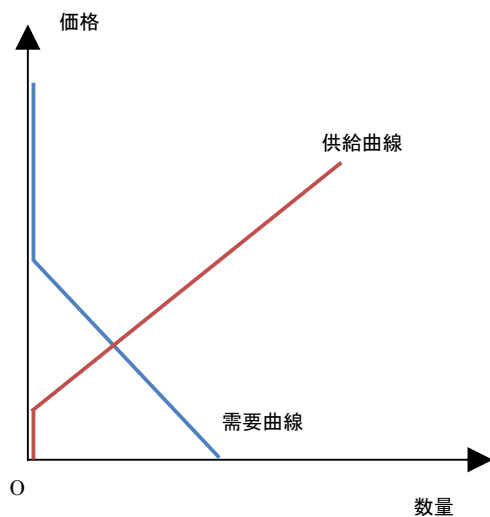


図 1: パターン A

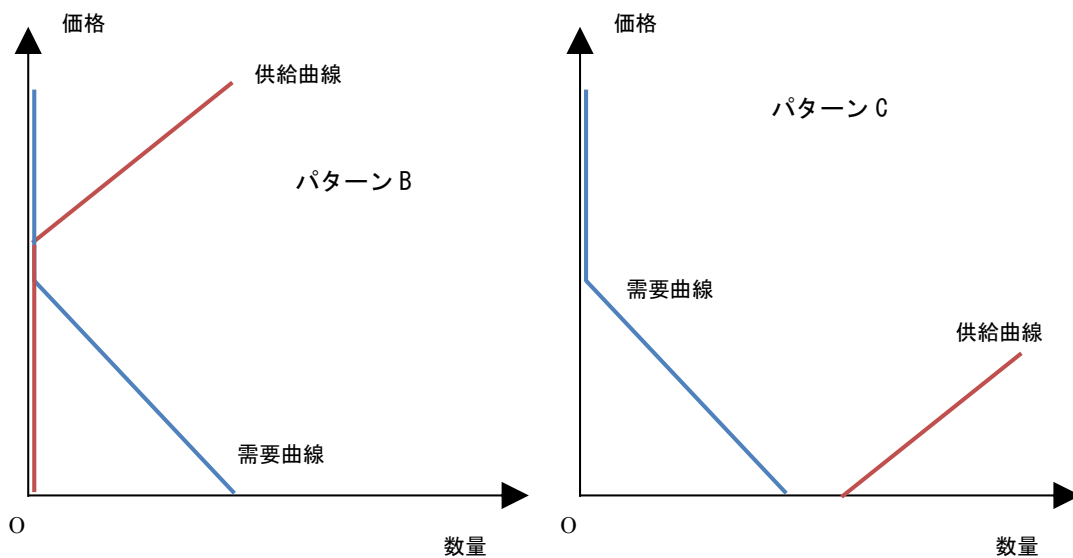


図 2: 左側がパターン B、右側がパターン C

ただし $c(q)$ は総費用、 q は生産量、 $\alpha > 0$ と $\beta > 0$ は外生的なパラメータである。(1) 式は、総費用が生産量の二次関数で、かつ凸関数であることを意味している¹。この費用を使うと企業の利潤 π は次式のように表現できる。

$$\pi = pq - c(q) = pq - \left[\alpha q + \frac{1}{2} \beta q^2 \right] \quad (2)$$

もし生産量 q に何の制約もないならば利潤最大化の条件は次式となる。

$$\frac{\partial \pi}{\partial q} = p - [\alpha + \beta q] = 0 \quad (3)$$

つまり、「価格=限界費用」という条件である。しかし、この式によって生産量を決定する場合、パラメータと価格の値によっては生産量が負になってしまう場合がでてくる。例えば、 $p = 1$ 、 $\alpha = 2$ 、 $\beta = 2$ のケースでは $q = -0.5$ となる。

生産量が負になるのはおかしいので、このタイプの問題を解くときには非負制約を課しておく必要がある。生産量が非負という制約付きで、(2) 式の利潤を最大化するという問題の条件は、Kuhn-Tucker 条件と呼ばれる次の式で与えられる²。

$$p - [\alpha + \beta q] \leq 0 \quad (4)$$

$$q \geq 0 \quad (5)$$

$$(p - [\alpha + \beta q])q = 0 \quad (6)$$

最後の式は、 $p - [\alpha + \beta q] < 0$ 、つまり限界費用が価格を上回るときには、 $q = 0$ 、つまり生産量はゼロにならなければいけない、逆に $q > 0$ 、つまり生産量が正になるなら、 $p - [\alpha + \beta q] = 0$ 、つまり限界費用が価格に等しくなっていなければならないということを意味する。この 3 本目の式は「**complementary slackness 条件**」と呼ばれる。これにより生産量に非負制約を課した形での利潤最大化条件が表現できる。

企業が決めるのは供給量であるので、以下では q の代わりに、 s という変数を利用することにする。また、以下では上の式を少し変形した次の形式を用いることにする。

$$\alpha + \beta s - p \geq 0 \quad (7)$$

$$s \geq 0 \quad (8)$$

$$(\alpha + \beta s - p)s = 0 \quad (9)$$

図 3 は $\alpha = 20$ 、 $\beta = 0.5$ のときの、(7) ~ (9) 式を満たす $\{p, s\}$ の組み合わせ、つまり供給曲線を表している³。価格が 20 を下回るときには供給量は 0 となり、供給曲線は縦軸に張り付くような形状になる。費用関数を生産量について 2 次関数と仮定していることから、限界費用は生産量について 1 次関数になる。そのため供給曲線は直線となる。

¹ $c''(q) > 0$ であるので凸関数である。凸関数であれば後の利潤最大化の二階の条件が自動的に満たされることになる。(1) 式で β の前に $1/2$ がかけられているが、これは供給関数を単純な形にするためであり、それ以外に深い意味はない。 $1/2$ をかけないでも実質的には何も変わらない。

² Kuhn-Tucker 条件について詳しくは、例えば、Simon and Blume (1994, p.439)、あるいは Mas-Colell et al. (1995, p.959) を参照されたい。

³ (p, s) の組み合わせを求め、それを基に Excel で散布図を描いたグラフである。

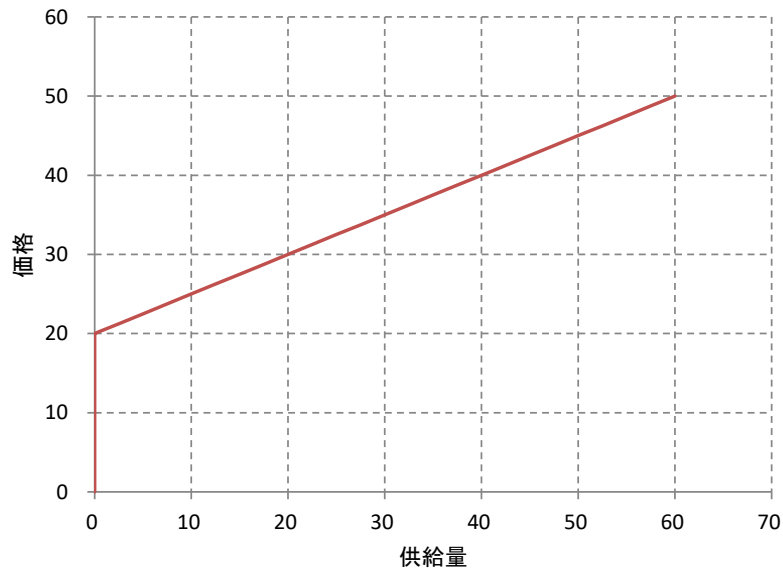


図 3: 供給曲線

2.2 消費者

次に消費者側を考える。消費者は q 財、 v 財という 2 つの財を消費しており、次の効用関数を持っているとする。

$$u = u(q, v) = \gamma q - \frac{1}{2}\epsilon q^2 + v \quad (10)$$

ただし、 u は効用、 q は q 財の消費量、 v は v 財の消費量、 $\gamma > 0$ 、 $\epsilon > 0$ は外生的なパラメータである⁴。 v 財をニューメラルとし、 q の価格を p 、所得を m と置くと、予算制約式は次のように表現できる。

$$pq + v = m \quad (11)$$

これにより (10) 式から v を消去できる。

$$u = \gamma q - \frac{1}{2}\epsilon q^2 + m - pq \quad (12)$$

ここでもし q 財の消費量に何ら制約がないのなら、効用を最大化する条件は次式で与えられる⁵。

$$\frac{\partial u}{\partial q} = \gamma - \epsilon q - pq = 0 \quad (13)$$

しかし、企業側でも問題になったように、(13) 式では消費量が負になる可能性が生じてしまう。そこで消費についても非負制約を課して最適化問題を解く必要がある。そのための Kuhn-Tucker 条件は次式となる。

$$\gamma - \epsilon q - p \leq 0 \quad (14)$$

⁴ (10) 式のように $u(q, v) = f(q) + v$ と書ける効用関数は準線形 (quasi-linear) の効用関数と呼ばれる。

⁵ 消費者についてもプライステイカーと仮定している。

$$q \geq 0 \quad (15)$$

$$(\gamma - \epsilon q - p)q = 0 \quad (16)$$

最後の式は先程と同じように解釈すればよい。すなわち、 $\gamma + \epsilon q - p < 0$ 、つまり限界効用が価格（消費者にとっての限界費用）よりも小さいなら、 $q = 0$ 、つまり消費量はゼロとなっていなければならない、逆に $q > 0$ 、つまり消費量が正なら、 $\gamma + \epsilon q - p = 0$ 、つまり限界効用が価格に等しくなっていなければならないということである。この 3 式によって、消費量が 0 になる可能性も含めた形での効用最大化条件が表現される。

以下では、需要量（消費量）を d という変数で表現する。また、ここでも不等号が左側を向くように表現しなおす。

$$p - [\gamma - \epsilon d] \geq 0 \quad (17)$$

$$d \geq 0 \quad (18)$$

$$(p - [\gamma - \epsilon d])d = 0 \quad (19)$$

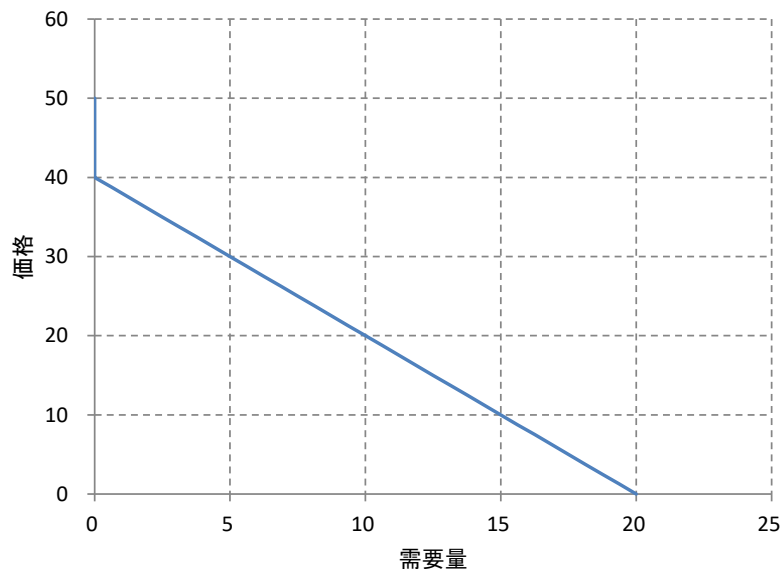


図 4: 需要曲線

図 4 は $\gamma = 40$ 、 $\epsilon = 2$ のときの (17) ~ (19) 式を満たす $\{p, q\}$ の組み合わせ、つまり需要曲線を描いたものである。 $p > 40$ のときには需要量は 0 となり、供給曲線と同様に縦軸に張り付く部分が生じる。

2.3 市場均衡

ここまでで、主体的均衡、つまり利潤最大化と効用最大化を考えた。その利潤最大化と効用最大化から供給量と需要量が決まってくる。均衡を考えるにはさらに市場均衡を考える必要がある。もし、価格が必ず正になるとわかっているのなら、市場均衡条件は

$$s = d \quad (20)$$

ですむ。つまり、供給量と需要量が等しくなるという条件である。しかし、価格が必ずしも正にならない、つまり価格が 0 になっても供給が需要を上回ってしまうというケースを事前には排除できないかもしれない。そのような場合には、市場均衡条件は次のように修正される。

$$s - d \geq 0 \quad (21)$$

$$p \geq 0 \quad (22)$$

$$(s - d)p = 0 \quad (23)$$

ここでもやはり 3 番目の complementary slackness 条件が入ってくる。これは、 $s > d$ 、つまり供給が需要を上回っているなら、 $p = 0$ 、つまり価格が 0 になっていなければならない、逆に $p > 0$ 、つまり価格が正なら、 $s - d = 0$ 、つまり供給は需要と等しくなっていなければならないということである。

2.4 均衡条件（まとめ）

以上より、供給量、需要量、価格に対して非負制約を課した形での均衡条件は (7)～(9) 式、(17)～(23) 式の 9 本で表される。ここまで利用した表現では一つの変数を決定するのにそれぞれ 3 本ずつの条件が必要になった。このままでは表現が非常に煩雑になるので、次のように簡略化した表現を用いる。すなわち

$$f(x) \geq 0 \quad x \geq 0 \quad f(x)x = 0 \quad (24)$$

という式を以下では

$$f(x) \geq 0 \perp x \geq 0 \quad (25)$$

というように表現する。この表記を使う 9 本の均衡条件式は次のよう表せる。

$$\alpha + \beta s - p \geq 0 \perp s \geq 0 \quad (26)$$

$$p - [\gamma - \epsilon d] \geq 0 \perp d \geq 0 \quad (27)$$

$$s - d \geq 0 \perp p \geq 0 \quad (28)$$

以上のように

- 等号だけではなく、不等号も条件式に入ってくる
- Complementary slackness 条件が入ってくる

というような問題を mixed complementarity problem (MCP) という⁶。普通の等号のみを含む連立方程式は MCP の特殊なケースとして扱える。GAMS ではこの MCP を解くための専用のソルバー (MCP ソルバー) が存在している。

3 MCP の定義

前節で MCP がどのような問題かおおよっぱに説明したが、ここで一応、厳密な定義を紹介しておく。

⁶MCP は実際にはもっと一般的な形で表現される。(26)～(28) 式は MCP の特殊ケースである。

3.1 非線形の連立方程式

まず、MCP ではなく普通の非線形連立方程式 (system of nonlinear equations) は次のような形式で表現される。

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad i = \{1, \dots, n\} \quad (29)$$

連立方程式を解くとは (29) 式を満たす $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ を求めるという問題である。

3.2 MCP の一般的な定義

注：MCP については、『PATH のマニュアル』が詳しい。

一般的な MCP とは次のような式を満たす $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ を見つけるという問題である。

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad i = \{1, \dots, n\} \quad (30)$$

$$l_i \leq x_i \leq u_i \quad i = \{1, \dots, n\} \quad (31)$$

$$f_i(x_1, \dots, x_n)(x_i - l_i) = 0 \quad i = \{1, \dots, n\} \quad (32)$$

$$f_i(x_1, \dots, x_n)(u_i - x_i) = 0 \quad i = \{1, \dots, n\} \quad (33)$$

ただし、 $f_i(\mathbf{x})$ は $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ の関数である。

MCP の特徴は (32) 式、(33) 式の条件である。これは制約が binding でなければ $f_i(\mathbf{x}) = 0$ になり、 $f_i(\mathbf{x}) > 0$ なら $x_i = l_i$ 、 $f_i(\mathbf{x}) < 0$ なら $x_i = u_i$ になるという条件である。このように等号だけではなく、不等号が混ざってくるのが MCP の特徴である。

3.3 変数に非負制約だけあるケース

一般的な MCP は 3.2 節のような問題であるが、実際によく見られるのはその特殊ケースである。特によくあるのが変数に対する制約としては非負制約のみが存在するケースである。これは、一般的な定義において、 $l_i = 0$ 、 $u_i = +\infty$ と設定したケースである。

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad i = \{1, \dots, n\} \quad (34)$$

$$0 \leq x_i \quad i = \{1, \dots, n\} \quad (35)$$

$$f_i(x_1, \dots, x_n)x_i = 0 \quad i = \{1, \dots, n\} \quad (36)$$

4 GAMS のコード

以下で GAMS でこの問題を解くためのコード (mcp_sample.gms というプログラム) を説明しよう

4.1 コードの解説

それでは以下でコードを解説していく。やはりここでも自分でコードを書き、少しずつ実行、計算結果を確認しながら説明を読むようにしてほしい。

```
$title MCP (Mixed complementarity problem)
$ontext
Time-stamp:      <2013-10-16 11:03:33 st>
First-written:   <2013/10/11>
$offtext
```

まず、ここはプログラムの説明部分である。ここについては Part 3 で説明した。

```
Parameter
  alpha      Parameters for cost function
  beta       Parameters for cost function
  gamma      Parameters for utility function
  epsilon    Parameters for utility function;
alpha = 0;
beta = 0.5;
gamma = 10;
epsilon = 2;
display alpha, beta, gamma, epsilon;
```

ここでは費用関数、効用関数のパラメータを設定している。これらは本来費用関数、効用関数のパラメータであるが、各パラメータは結局

- alpha は供給曲線の切片
- beta は供給曲線の傾き
- gamma は需要曲線の切片
- (-)epsilon は需要曲線の傾き

というように解釈し直せる。

```
* -----
* 内生変数の宣言
* 内生変数は variables 命令で宣言
variables
  sup      Supply
  dem      Demand
  pri      Price
;
```

ここではモデルの内生変数、つまり供給量 (sup)、需要量 (dem)、価格 (pri) にあたる変数を宣言している。

```
Equations
```

```

e_sup   "FOC for profit maximization"
e_dem   "FOC for utility maximization)"
e_pri   "Market clearing condition"
;

```

ここでは式を宣言している。式については後に

- 利潤最大化条件（供給関数）に対しては供給量（sup）
- 効用最大化条件（需要関数）に対しては需要量（dem）
- 市場均衡条件に対しては価格（pri）

を対応させることになる。対応関係がわかりやすくなるように、式の名前は「e_+その式に対応する変数名」としている。

```

e_sup .. alpha + beta * sup - pri =g= 0;
e_dem .. pri - (gamma - epsilon * dem) =g= 0;
e_pri .. sup - dem =g= 0;
model mcp_sample MCP / e_sup.sup, e_dem.dem, e_pri.pri /;

```

ここではまず式を定義し、その後、モデルを宣言、定義している。式は上から順に均衡条件の (26) ~ (28) 式に対応している。この部分が MCP タイプのモデルを記述する際のポイントになるので、その記述方法をよく理解する必要がある。

例えば、供給量 s については次の 3 つの式が決定式であった。

$$\begin{aligned} \alpha + \beta s - p &\geq 0 \\ s &\geq 0 \\ (\alpha + \beta s - p)s &= 0 \end{aligned}$$

GAMS でこのような MCP タイプ問題を記述する際には条件式として直接この 3 つの式を書くということはない。記述は次のようにおこなう。

- 1 番目の条件式は普通に式として記述する。
- 2 番目の条件式は、一本の式として記述するのではなく、変数に対する下限として設定する。つまり、`sup.lo = 0` という形で記述する。
- 3 番目の条件式は明示的に式としては記述しない。その代わりにモデルの定義の部分で `e_sup.sup` のように式 `e_sup` に対し、変数 `sup` を対応させることで 3 番目の関係を組み込むことができる。
 - つまり、モデルの定義の部分の `e_sup.sup` という指定は、式 `e_sup` が等号では満たされないなら `sup` は下限値（この場合 0）をとり、`sup` が下限値より大（つまり正）なら、`e_sup` は等号で満たされるという条件を指定するのと同じになるということである。

[1 番目の式の書き方についての注]

上で述べたように 1 番目の式はそのまま式として記述する。それを $\alpha + \beta s - p \geq 0$ という形で書いているが、これは数学的には $p - (\alpha + \beta s) \leq 0$ と同値である。よって、この式をプログラムで記述する際に

```
e_sup .. alpha + beta * sup - pri =g= 0;
```

ではなく、

```
e_sup .. pri - (alpha + beta * sup) =l= 0;
```

という書き方をしても同じではないかと思うかもしれない。しかし、この書き方をすると GAMS は間違いとみなし、次のようなエラーを出す（実際試してみたい）。

```
**** Lower Bound and =L= illegal
      Sup
```

GAMS でこの MCP タイプのモデルを記述する際には不等号の向きにルールがあり、下限値を設定する変数を対応させる式は \geq (=g=) を使って記述しなければならないことになっている。よって、下側のような「=l=」を使った記述はできない。(7) 式と (17) 式において不等号が左開きになるようにわざわざ書き直したのは、GAMS のプログラムで記述するときに左開きを使う必要があるためである。

以上の説明より、MCP タイプのモデルでは式と変数の対応関係が重要であることがわかる。`e_sup.sup` の場合、`e_sup` が binding にならないときに 0 になるのは `sup` という変数であり、`sup` が正のときに binding にならなければいけないのは `e_sup` という式である。もし、`e_sup.dem` となっていれば全く違う条件になってしまうことになる。よって、式と変数を適切に対応させる必要がある。ただし、経済学のモデルの場合には式と変数の対応関係は非常にわかりやすいことが多いので、どう対応させるかで迷うようなケースは少ないと考えられる。

注：MCP タイプ以外のモデル、例えば NLP のモデルでは `model` 命令でモデルを定義するときに式を指定するだけでよく、式に変数を対応させる必要はない。モデルの定義の際に、式に変数を対応させるのは MCP タイプのモデルに特有の要件である。この点については第 4 節で補足説明をおこなう。

それでは続きを考える。

```
sup.lo = 0;
dem.lo = 0;
pri.lo = 0;

sup.l = 10;
```

```
dem.l = 10;
pri.l = 10;
```

ここは変数に対する下限値と変数の初期値を設定している部分である。全て、下限値を 0 としている。10 という初期値は適当に選んだ値で、10 であることにたいした根拠はない。

```
solve mcp_sample using mcp;
```

ここでモデル `mcp_sample` を解いている。Part 3 で説明したように「`using mcp`」という指定によって MCP ソルバーを利用して解くことになる。

	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL
-- VAR sup	.	4.000	+INF	.
-- VAR dem	.	4.000	+INF	.
-- VAR pri	.	2.000	+INF	.

これは LST ファイルに出力された計算結果である。均衡価格は 2、均衡供給量、需要量は 4 となっている。自分でもモデルを解いてみて同じ結果になるか確認して欲しい。

上の `solve` 命令のすぐ後に `$exit` 命令があるのでプログラムの実行はここで終了する (`$exit` 命令はそこでプログラムの実行を終了せよという命令)。この後の部分ではパラメータを変更するシミュレーションを行っている。費用関数のパラメータ α (供給曲線の切片) の値を変更することで、均衡価格、均衡数量がどう変化するかを見るというシミュレーションである。実行する場合には、`$exit` 命令を消せばよい。

以下では、その部分のプログラムの解説をする。

```
set    itr    Index of iteration / itr1*itr21 /;
display itr;
```

ここでは集合 `itr` を宣言・定義している。これまで集合を定義する際には、スラッシュで囲んだ中にその要素を書くという形で記述してきたが、ここでは「`itr1*itr21`」という特殊な記法を利用している。この「`itr1*itr21`」という記法は、「`itr1, itr2, itr3, ..., itr20, itr21`」のように記述するのと同じ効果を持つ。よって、上の定義によって `itr` は `itr1` から `itr21` という 21 個の要素を持つことになる。実際に要素がそのように定義されているか出力結果で確認して欲しい。

Parameter	
<code>alpha_(itr)</code>	Value of alpha
<code>alpha_i</code>	Initial value of alpha
<code>alpha_f</code>	Final value of alpha;

ここでは `alpha` の値を変更するシミュレーションのための追加的なパラメータを宣言している。

`alpha_i` は最初の `alpha` の値を設定するパラメータ、`alpha_f` は最後の `alpha` の値を設定するパラメータである。

```
alpha_i = 20;
alpha_f = -20;

alpha(itr) =
    alpha_i + (ord(itr) - 1) * (alpha_f - alpha_i)/(card(itr) - 1);
display alpha_;
```

ここで上で宣言したパラメータに値を代入している。最初の `alpha` の値は 20、最後の `alpha` の値は -20 と置いている。つまり、供給曲線の切片を 20 から -20 の範囲で動かすことになる（これは供給曲線を上から下にシフトさせていくということ）。

その下で各 `itr` に対する `alpha` の値を設定している。ここでは繰り返しの回数に応じて `alpha_i` から `alpha_f` までの長さを等分して、1 回毎に少しずつ変えていくという方法をとる。繰り返しの数が 3 回なら 2 等分、4 回なら 3 等分するという形になるので、「繰り返しの数 - 1」で「`alpha_f - alpha_i`」の長さを割り、その値を 1 回毎に変えていく。ここで「`card(itr)`」は集合 `itr` の要素の数を返す命令である。また、「`ord(itr)`」というのはその時点での `itr` の要素が何番目にあたるかを返す命令である。具体的には、`ord("itr1")=1`、`ord("itr2")=2`、`ord("itr21")=21` という値をとる。

実際に「`alpha_`」にどのような値が代入されているか出力結果で確認して欲しい。GAMS においてパラメータを少しずつ変更して何度もモデルを解くというシミュレーションをおこなうときにはこのような集合、パラメータの使い方をすればよい。

```
loop(itr,
    alpha = alpha(itr);
    *   モデルを解く
    solve mcp_sample using mcp;
    *   計算結果をパラメータに代入。
    results(itr,"alpha") = alpha + eps;
    results(itr,"price") = pri.l + eps;
    results(itr,"supply") = sup.l + eps;
    results(itr,"demand") = dem.l + eps;
    results(itr,"s-d") = sup.l - dem.l + eps;
);
```

この部分では `loop` 命令を利用して繰り返しモデルを解き、その計算結果をパラメータに代入している。

```
Loop(itr,
);
```

この表現によって集合 `itr` の要素の回数だけ `loop` 内のコードが繰り返し実行されることになる。

```
results(itr,"alpha") = alpha + eps;
```

ここではパラメータ `alpha` の値をパラメータ `results` に代入している。`eps` は GAMS においてゼロに近い小さい値を表す特殊な記号である。`eps` を足している理由についてはここでは説明しないが、この出力結果を後に Excel に出力するために `eps` を足すことが必要である⁷。

```
*      results パラメータを mcp_sample.gdx ファイルに出力する。
execute_unload "mcp_sample.gdx", results;
```

これはパラメータ `results` の値を `mcp_sample.gdx` ファイルに出力するという命令である。GDX ファイルというのは GAMS 独自のデータ形式であり、GAMS でデータのやりとりをするときにはこの形式でデータを扱うのが標準となっている。例えば、エクセルからデータを読み込むような場合でも

Excel ファイル → GDX ファイル → GAMS

というように一度 GDX ファイルにしてから読み込む手法をとる。同様に、Excel ファイルにデータを出力するときは

GAMS → GDX ファイル → Excel ファイル

というようにやはり GDX ファイルを通じてエクスポートが行われる。ここでも後に結果を Excel ファイルに出力をするため、まず GDX ファイルに出力をしている。

```
*      mcp_sample.gdx ファイルの中身を mcp_sample.xlsx に出力する。
Execute 'gdxrw i=mcp_sample.gdx o=mcp_sample.xlsx epsout=0 par=results rng=results!A1 rdim=1 cdim=1';
```

これは GDX ファイルの中身を Excel ファイルにエクスポートする命令である。`execute` というのは GAMS から外部プログラムを呼び出す命令であり、GDX ファイルから Excel ファイルへの出力には `gdxrw.exe` という GAMS に付属の外部プログラムを利用する。上の命令は、「`mcp_sample.gdx`」内の `results` というパラメータを「`mcp_sample.xlsx`」という Excel ファイルの `results` というシートに A1 セルを起点にして出力せよという意味になる。`gdxrw` について詳しくは「Bruce McCarl のマニュアル」を見て欲しい⁸。

4.2 シミュレーション結果

前節のプログラムを実行した結果が表 1 である。ここから α （供給曲線の切片）の値を 20 から -20 に変化させたときに、均衡の価格、供給量、需要量、超過供給量がどう変化していくかがわかる。

⁷`eps` を足さないプログラムを実行して見ればよい。

⁸<https://www.gams.com/latest/docs/userguides/mccarl/index.html>

表 1: 計算結果

α	価格	供給量	需要量	超過供給量	pri.m
20	18.0	0.0	0.0	0.0	0.0
18	18.0	0.0	0.0	0.0	0.0
16	16.0	0.0	0.0	0.0	0.0
14	14.0	0.0	0.0	0.0	0.0
12	12.0	0.0	0.0	0.0	0.0
10	10.0	0.0	0.0	0.0	0.0
8	8.4	0.8	0.8	0.0	0.0
6	6.8	1.6	1.6	0.0	0.0
4	5.2	2.4	2.4	0.0	0.0
2	3.6	3.2	3.2	0.0	0.0
0	2.0	4.0	4.0	0.0	0.0
-2	0.4	4.8	4.8	0.0	0.0
-4	0.0	8.0	5.0	3.0	3.0
-6	0.0	12.0	5.0	7.0	7.0
-8	0.0	16.0	5.0	11.0	11.0
-10	0.0	20.0	5.0	15.0	15.0
-12	0.0	24.0	5.0	19.0	19.0
-14	0.0	28.0	5.0	23.0	23.0
-16	0.0	32.0	5.0	27.0	27.0
-18	0.0	36.0	5.0	31.0	31.0
-20	0.0	40.0	5.0	35.0	35.0

$\beta = 0.5$ 、 $\gamma = 10$ 、 $\epsilon = 2$ という設定。

均衡は第 1 節で見た 3 つのパターンに分かれる。まず、1 番上の青い部分がパターン B にあたる均衡である。このパターンでは、供給曲線が非常に高い位置にあるため、価格は正であるが、供給量、需要量ともゼロになるという均衡が成立している。2 番目の白い部分がパターン A にあたる均衡で、このパターンでは価格も正であるし、供給量、需要量も正である。最後の赤い部分がパターン C にあたる均衡で、均衡価格が 0 となる。価格がゼロになっているのに供給量 > 需要量が成り立つため、この均衡では超過供給が発生する。

A というパターンがいわゆる普通の均衡であるが、MCP の形式でモデルを記述すれば、B や C という供給量、需要量、価格がゼロになってしまうような均衡を一つのケースとして考慮することができるということである。

4.3 変数の Marginal 値の意味

Part 3 において、「MCP モデルにおける変数の marginal 値は、その変数が対応づけられた式の乖離幅を表している」と説明した。表 1 の pri.m は変数 prim の marginal 値を表している。第 4.1 節で見たように、変数 pri は式 e_pri に対応づけられている。その式 e_pri は次のように定義されていた。

```
e_pri .. sup - dem =g= 0;
```

従って、pri の marginal 値 (pri.m) は次の値を表現することになる。

```
pri.m = sup - dem
```

つまり、超過供給の値となる。実際、`pri.m`の値は「供給量－需要量（= `sup` - `dem`）」によって計算された超過供給量の値に等しくなる。`sup` や `dem` の marginal 値も同様に解釈できる。

MCP モデルでは「変数の marginal 値＝その変数が対応づけられた式の乖離幅」であり、式が等号で成立するならゼロとなるが、上の例のように等号では成立しない場合にはどれだけ右辺左辺が乖離しているかを表すことになる。

5 補足説明

MCP のモデルではモデルを指定する際に式と変数を対応させる形をとると説明した。しかし、MCP のモデルであっても必ずしも変数を対応させる必要があるとは限らない。以下では、MCP のモデルにおいてどのようなときに変数を式に対応させる必要があるのか（あるいは、ないのか）をもう少し詳しく説明する。

5.1 式に変数を対応させない場合

まず、モデルの定義において、式に変数を対応させなかったらどうなるかを確認してみよう。`mcp_sample_alt_a.gms` ではモデルの定義を次のようにおこなっている。

```
model mcp_sample MCP / e_sup, e_dem, e_pri /;
```

この書き方では式だけを指定し、変数を対応させていない。このようにモデルを定義した場合に GAMS を実行すると、次のようなエラーが生じる。

```
-----
92 *      モデルを解く
93 solve mcp_sample using mcp;
****                      $484,256
**** The following MCP errors were detected in model mcp_sample:
**** 484 e_sup unmapped equ =l= =g= or =n= in mcp
**** 484 e_dem unmapped equ =l= =g= or =n= in mcp
**** 484 e_pri unmapped equ =l= =g= or =n= in mcp

484 Unmapped MCP equations cannot be =g= =l= or =n=
```

484 という番号のエラーが生じている。これは英語のメッセージが示すように、式の中で「 \geq 」や「 \leq 」が使われているにもかかわらず、式に対して変数が対応（マップ）されていないというエラーである。このエラーが示すように、MCP のモデルにおいて式の中で「 \geq 」や「 \leq 」を利用した場合には、必ず式に対して変数を対応させる必要がある。

5.2 式で不等号を利用しない場合

MCP のモデルの式の中で「 \geq 」や「 \leq 」を利用しているときには式に対して変数を対応させる必要があった。それでは式の中で等号しか使われていなければどうであろうか？

第 4.2 節のシミュレーション結果によれば、デフォルトのパラメータの設定の下で均衡では供給量=需要量= 4、価格= 2 となった。供給量、需要量、価格のどれも正であるため、これは均衡条件式が均衡において等号で成立しているということを意味する。均衡状態において結局等号として成立することから、あらかじめ式を全て等号で書き直したのが `mcp_sample_alt_b.gms` である。これを実行すると再びエラーが生じる。

```
**** Unmatched variable not free or fixed
      sup

**** Unmatched variable not free or fixed
      dem

**** Unmatched variable not free or fixed
      pri

**** Counts do not match
      Single equations in unmatched =E= blocks          3
      Unmatched single free variables                   0
```

「Unmatched variable not free or fixed」とは、式に対応させられていない（マッチされていない）変数が固定されている、あるいは制約が付いているというメッセージである。プログラムでは `sup`、`dem`、`pri` とも全て 0 以上という制約が付けられている⁹。MCP のモデルにおいては、このように制約を付けられた変数（下限、上限をつけられた変数）は必ず式に対応させなければならない。それが上のメッセージの意味である。

Part 3 で例に利用した効用最大化問題の式では等号しか含まれていなかった。しかし、その場合でも変数に非負制約を課していたので、やはりモデルの定義において式に変数を対応させる必要があるということである。

5.3 式に変数を対応させない場合

式において不等号を利用していないとしても、変数に制約が付けられている場合にはやはり式に変数を対応させる必要があることを見た。それでは変数に対する制約をはずすとどうなるのか？

`mcp_sample_alt_c.gms` は `mcp_sample_alt_b.gms` から変数に対する下限の設定を除去したプログラムである。これを実行するとエラーも出ず、`mcp_sample.gms` と全く同じように解ける。つまり、MCP のモデルであっても

- 式の定義において等号しか使われていない
- 変数に対する制約がない

⁹`sup.lo=0` というような形で下限を設定した。

という設定であれば、モデルの定義の際に式に変数を対応させる必要はないということである。このような設定が可能なモデルでは単に式を指定するだけでよい。

それでは実際にそのようなケースは多いだろうか？ 1 つ目の設定については満たされることが多い、つまり式の定義において等号しか利用しないで済むケースは多い。しかし、2 つ目の設定にはできないケースが多い。というのは経済学のモデルでは変数に非負制約を課す必要があるケースが多いからである。ただ、場合によっては均衡において変数が必ず正の値をとることがわかっているケースもある。その場合はどうかというと、その場合であっても GAMS では非負制約を設定しなければ上手く解けないケースが多い。それは GAMS の計算過程において解に辿り着くまでに 0 や負の値をとることでエラーが生じてしまうことがよくあるからである¹⁰。

以上のように、場合によっては、MCP のモデルであってもモデルの定義の際に式のみを指定すればよいときもあるが、経済学のモデル、CGE モデルでは変数に非負制約を課す必要があることが多いため式の指定と同時に変数を式に対応させる必要がある。

参考文献

Mas-Colell, Andreu, Michael D. Whinston, and Jerry R. Green (1995) *Microeconomic Theory*, New York: Oxford University Press.

Simon, Carl P. and Lawrence Blume (1994) *Mathematics for Economists*, New York: W. W. Norton Company.

6 問題

問題 1：リカードモデル

国際貿易の理論モデルの一つとして「リカードモデル」と呼ばれるモデルがある。以下で単純なリカードモデルを用いて MCP タイプのシミュレーションをする。

モデル

- 財（部門）は 2 財（ $i = 1, 2$ ）
- 生産要素は労働のみ（1 生産要素）
- 各財の生産は次の生産関数に従っておこなわれる

$$q_i = l_i/a_i$$

ただし、 q_i は部門 i の生産量、 l_i は部門 y の労働投入量、 a_i は 1 単位の生産をおこなうのに必要となる労働の量を表すパラメータ（労働投入係数）である。

- この国の労働賦存量を \bar{l} とする。

¹⁰mcp_sample_alt_c.gms は変数に非負制約を課していないが特に問題なく解けている。このように非負制約を課してなくても正常に解けてしまうケースもあるが、そうならないケースも多い。

- 生産要素が労働だけで、その限界生産性（上の記号では $1/a_i$ ）が常に一定という点がリカードモデルの大きな特徴である。

各部門は利潤最大化行動に基づいて労働投入量を決定すると仮定する。各部門の利潤 π_i は

$$\pi_i = p_i \frac{l_i}{a_i} - w l_i \quad (37)$$

と表現できる。ただし、 p_i は財 i の価格、 w は賃金率であり、第 1 項目が収入、第 2 項目が費用を表している。

各部門はプライステイカーとして行動する。また、各部門の労働投入量は非負の値をとる。このときの利潤最大化のための Kuhn-Tucker 条件は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial l_i} = \frac{p_i}{a_i} - w \leq 0 \quad l_i \geq 0 \quad \left[w - \frac{p_i}{a_i} \right] l_i = 0 \quad (38)$$

これは MCP の形式になっている。

さらに、労働市場の均衡条件は次式となる。

$$\bar{l} - \sum_i l_i = 0 \quad (39)$$

このモデルでは労働供給も労働需要も必ず正となり、その結果必ず賃金も正となるので、労働市場の均衡条件は「労働供給＝労働需要」のように表現している。

本来のリカードモデルでは、ここに財の需要側（財市場）を加え、さらに複数の国を想定し、貿易をおこなうことの効果を考えるのであるが、ここでは財市場は考慮せず、財の価格が外生的に与えられるとする。そして、財 1 をニューメレールと仮定するすると、以上のモデルは次のように表現できる。

$$w - \frac{p_i}{a_i} \geq 0 \perp l_i \geq 0 \quad i = 1, 2 \quad (40)$$

$$\bar{l} - \sum_i l_i = 0 \quad (41)$$

ただし、財 1 がニューメレールであることから、 $p_1 = 1$ である。

このモデルを GAMS において MCP の形式で記述し、財 2 の価格 p_2 を 0.5 から 4 まで変更していくシミュレーションをおこない、それによって各財の生産量がどう変化するかを説明しなさい。また、価格がどのような値のときに不完全特化（二つの財が同時に生産される状況）が生じるか求めなさい。ただし、パラメータ、労働賦存量は次のように設定すること。

- $a_1 = 1$
- $a_2 = 2$
- $\bar{l} = 100$

図 5 は上のシミュレーションの結果をもとに財 2 の供給曲線を Excel で描いたグラフである。横軸の $q(2)$ が財 2 の供給量、縦軸の $p(2)$ が財 2 の価格（相対価格）である。

7 履歴

- 2017-03-15: 説明の修正。

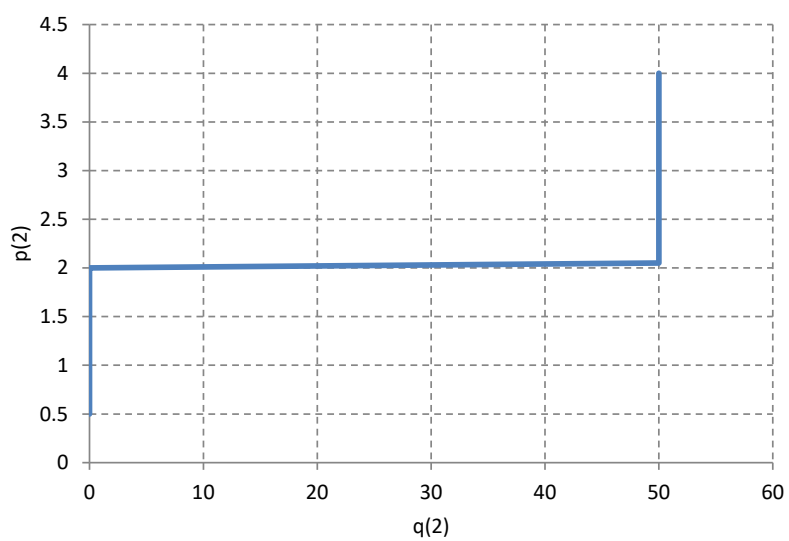


図 5: リカードモデルにおける供給曲線