『多数の投入物を含む CGE モデルにおける固定費用の特定化方法』

武田史郎

関東学園大学経済学部経済学科
373–8515 群馬県太田市藤阿久町 200

e-mail: <zbc08106@park.zero.ad.jp>

2007 年 12 月

概 要

規模の経済性を考慮した CGE モデルでは，固定費用の存在によって規模の経済性を導入していることが多い．理論分析でしばしば仮定されるように，投入物が一種類しかないようなケースでは固定費用をモデルに導入するのは非常に簡単だが，CGE モデルでは多数の投入物が存在する状況を想定するのが普通である．このノートでは，そのように多数の投入物が存在する CGE モデルにおいてどのように固定費用が導入されているかを解説する[1].

1 ケース 1：投入物が単一のケース

まず，可変投入物，固定投入物にそれぞれ一種類の投入物しか利用されていないケースを考える．このケースでは費用の表現は非常に単純である．その一種類の可変投入物の価格を p^V，投入量を Q^V，同様に一種類しかない固定投入物の価格を p^F，投入量を Q^F とする．すると，総費用 C は次のように表現できる．

$$C = p^V Q^V + p^F Q^F$$

さらに通常は，可変投入物の量と生産量の間に比例の関係を仮定する，すなわち生産物一単位あたりに必要な可変投入物の量は一定と仮定するので，次のように書き換えることができる．

$$C = p^V a^V Q + p^F Q^F \tag{1}$$

ただし，a^V は生産物一単位あたりに必要な可変投入物の量，Q は生産量である．仮定より，$Q^V = a^V Q$ が成立する．この費用関数では，可変投入物，固定投入物への需要はそれぞれ $a^V Q$，Q^F で表される．

さらに理論分析では単純化のため，可変投入物と固定投入物に同じ投入物が利用されると仮定することが多い．今，その投入物を労働とし，その価格を p^L で表現すると，費用は次のように表せる．

$$C = p^L (a^V Q + Q^F) \tag{2}$$

[1] 規模の経済性を導入するには，本稿のように固定費用 (固定投入物) の存在を仮定するという方法以外に，規模に関して収穫逓増の生産関数を仮定するという方法もある．以下の議論は固定費用を仮定するアプローチを前提としていることに注意して欲しい．

この場合，$a^V Q + Q^F$ が労働 (投入物) への需要を表すことになる．固定費用を仮定している理論分析では，(2) 式のタイプの費用関数を利用していることが多い．例えば，Krugman (1980)，Fujita, Krugman and Venables (1999, p.51) 等は投入物は労働のみと仮定し，(2) 式と同じ費用関数を利用している[2].

2　ケース 2：多数の投入物が存在するケース

前節のように投入物が一種類から構成される場合には，投入物の価格 p^V，p^F，投入物の量 Q^V，Q^F が自然に定義できる．そして，生産費用は (1) 式のような単純な形式で表現することができる．しかし，多数の投入物が固定投入物，可変投入物として利用されているときには，何をもって p^V，p^F，Q^V，Q^F とするのかが自明ではない．例えば，可変投入物として，エネルギーと資本と労働が利用されているとする．このとき可変投入物の価格は，エネルギーの価格 p^E，資本の価格 r，労働の価格 w の 3 つであって，単一の価格 p^V があるわけではない．また，可変投入物の投入量も，エネルギー，資本，労働の投入量があるのであって，単一の可変投入物の量 Q^V があるわけではない．以上のように，多数の投入物が利用されているときには，(1) 式のような単純な形で費用を表現できるかは不明である．また，仮に表現できるとして，どのような条件の下，どのようにして表現できるのかは自明ではない．

以下では，多数の投入物が存在するケースでも，一定の条件の下では (1) 式の関係で費用を表現できることを示す．以下で解説する方法・考え方は，CGE モデルでよく利用されているものであるので，便宜的に CGE アプローチと呼ぶことにする[3].

2.1　可変投入物

固定投入物についても同じような方法で扱うのだが，最初に可変投入物を例にとって説明する．CGE アプローチでは，様々な中間財，資本，労働が一次同次関数を通じて合成 (生産) され,「可変投入物」になると仮定する．すなわち，I_i^V を可変投入物として利用される中間財 i の量，K^V，L^V を可変投入物として利用される資本，労働の量とすると,「可変投入物」の量 Q^V が I_i^V，K^V，L^V の一次同次の関数として求められるということである．

$$Q^V = A^V\left(\left\{I_i^V\right\}_i, K^V, L^V\right)$$

この関数 $A^V(\cdot)$ は様々な投入物を合成する役割を果しているので，以下では合成関数と呼ぶ．上で Q^V を「可変投入物」の量と呼んだが，これは実際に存在する投入物の量ではなく，可変投入物として利用されている様々な投入物の量から導出される数量指数である[4]．一度このように「可変投入物」を求めてしまえば，後は単一の投入物しかないケースと同じように扱えばよい．同時に多数の投入物が可変投入物として利用されているときには，可変投入物の量を表す単純な指標が存在しないことが問題であったが，CGE アプローチでは実際に存在する様々な投入物から仮想的な「可変投入物」というものが生産され，それが利用されると仮定するのである．

以下，単独で「可変投入物」と言ったときには，この数量指数のことを指すものとする．上では様々な投入物が合成され可変投入物となるという言い方をしたが，様々な投入物を投入することで

[2] Krugman (1980) では労働がニュメレールと仮定されているので，$p^L = 1$ と置いたものを費用関数としている．

[3]「よく利用されている方法」であって,「唯一の方法」ではないことには注意して欲しい．

[4]「可変投入物として利用される投入物」は実際に存在するが,「可変投入物 Q^V」 は数量指数であって実際の対応物があるわけではないことに注意．

「可変投入物」という財を生産するというようにも解釈できる．よって，$A^V(\cdot)$ を一種の生産関数とみなすこともできる．

$A^V(\cdot)$ は一次同次関数としか仮定されていないので，例えば

$$A^V\left(\left\{I_i^V\right\}_i, K^V, L^V\right) = 1$$

を満たす $\{I_i^V\}_i$，K^V，L^V の組み合せは無数に存在する．これは一単位の可変投入物をもたらす投入物の組み合せが無数に存在するということを意味している．それでは，どのように組み合せが決まるかというと，CGE アプローチでは費用を最小化するような組み合せが選択されると仮定する．この費用最小化行動，及び合成関数の一次同次性より，可変投入物の価格指数 p^V を次のように定義できる[5]．

$$p^V(\{p_i^I\}_i, r, w) \equiv \min_{\{I_i^V\}, K^V, L^V} \left\{\sum_i p_i^I I_i^V + rK^V + wL^V \middle| A^V\left(\left\{I_i^V\right\}_i, K^V, L^V\right) = 1\right\}$$

ただし，p_i^I は中間財 i の価格，r，w はそれぞれ資本，労働の価格である．上の定義より明かなように p^V は一単位の可変投入物を得るのに必要な最小費用を表している．以上のように p^V が定義できれば，可変費用は可変投入物の「価格指数×数量指数」($p^V Q^V$，あるいは $p^V a^V Q$) と表現できる．

2.2 固定投入物

固定投入物についても，可変投入物と全く同じように考える．すなわち，様々な投入物が一次同次関数を通じて合成され,「固定投入物」になると仮定する．Q^F を固定投入物の量，I_i^F を固定投入物として利用される中間財 i の量，K^F，L^F を可変投入物として利用される資本，労働の量とすると，以下の関係が成り立つ．

$$Q^F = A^F\left(\left\{I_i^F\right\}_i, K^F, L^F\right)$$

固定投入物 Q^F は様々な投入物から導出される数量指数である．可変投入物のとき同様に，ある一定量の固定投入物をもたらす投入物の組み合せは無数に存在する．定義より固定投入物 Q^F の投入量は生産量にかかわらず一定となるが，固定投入物として利用されている中間財 I_i^F，資本，労働 K^F，L^F の量は必ずしも一定とはならないことに注意して欲しい[6]．

可変投入物のときと同様に，投入物の選択は費用を最小化するようにおこなわれると仮定する．この費用最小化行動と合成関数 $A^F(\cdot)$ の一次同次性より，再び固定投入物の価格指数 p^F を定義できる．

$$p^F \equiv \min_{\{I_i^F\}, K^F, L^F} \left\{\sum_i p_i^I I_i^F + rK^F + wL^F \middle| A^F\left(\left\{I_i^F\right\}_i, K^F, L^F\right) = 1\right\}$$

[5]合成関数の一次同次性より p^V は 投入物価格にのみ依存し，Q^V からは独立となる．もし合成関数を一次同次と仮定しなければ，p^V は Q^V にも依存する，つまり単位最小費用は合成量 (生産量) にも依存することになる．これはよくある，生産関数と単位費用の関係の議論と同じである．

[6]ただし，合成関数にレオンチェフ型を仮定した場合には，Q^F の値が一定なら中間財，資本，労働の量も一定となる．レオンチェフ型以外の関数を仮定した場合には，一般には一定とはならない．

2.3　費用関数

以上のように，

1. 可変投入物，固定投入物とも様々な投入物が一次同次の関数を通じて合成されている
2. 各投入物の組み合わせの選択は費用を最小化するようにおこなわれる

と仮定すれば，多数の投入物が存在する状況であっても可変投入物，固定投入物とも合成された数量指数 Q^V，Q^F として表現できるし，投入物の価格もそれぞれの価格指数 p^V，p^F で表現できる．よって，単一の投入物しかなかったケースと同じように，総費用を

$$C = p^V a^V Q + p^F Q^F$$

という形式で表現することができる．

2.4　投入物への需要

「可変投入物」への需要は $Q^V = a^V Q$,「固定投入物」への需要は Q^F で表せるのはケース 1 と変わらないが，ここでは Q^V，Q^F はともに数量指数に過ぎず，実際の投入物ではない．実際の投入物への需要は費用関数に Shepard の補題を適用することで導出できる[7]．すなわち，中間財 i，資本，労働への需要はそれぞれ以下のように導出できる．

$$\begin{aligned}
I_i &= \frac{\partial C}{\partial p^I_i} = \frac{\partial p^V}{\partial p^I_i} a^V Q + \frac{\partial p^F}{\partial p^I_i} Q^F \\
K &= \frac{\partial C}{\partial r} = \frac{\partial p^V}{\partial r} a^V Q + \frac{\partial p^F}{\partial r} Q^F \\
L &= \frac{\partial C}{\partial w} = \frac{\partial p^V}{\partial w} a^V Q + \frac{\partial p^F}{\partial w} Q^F
\end{aligned}$$

例えば，I_i は中間財 i への投入需要であるが，第一項の $(\partial p^V / \partial p^I_i) a^V Q$ の部分が可変投入物としての需要で，第二項の $(\partial p^V / \partial p^I_i) Q^F$ の部分が固定投入物としての需要である．中間財 i は可変投入物としても，固定投入物としても利用されるので，総需要は両者の需要を足し合わせたものとなる．

2.5　規模に関して収穫一定のモデルとの関係

固定費用はないものとし，さらに $a^V = 1$ と置いてみる．すると，合成関数 A^V は一次同次の生産関数，可変投入物の価格指数 p^V は生産の単位費用と全く同じようにみなせる．よって，規模に関して収穫一定のモデルと全く同じモデルとなる．

2.6　例

前節までは一般的な形式のまま議論を進めてきた．ここでは，貿易 CGE モデルで実際に利用されている形に関数型を特定化してみる．二つのケースをとりあげるが，どちらでも合成関数として CES 型 (あるいは，その特殊形である Cobb-Douglas 型，レオンチェフ型) を利用している．

[7]Shephard の補題については奥野・鈴村 (1985, p.96)，Varian (1992, p.74)，Mas-Colell, Whinston and Green (1995, p.141) 等を参照されたい．

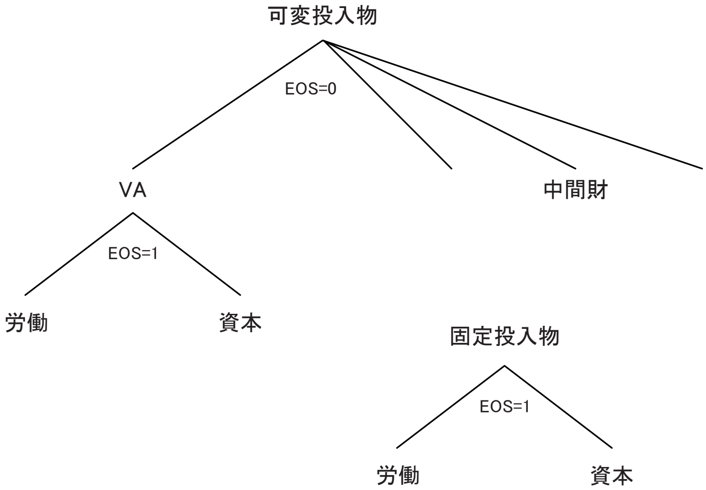

図 1: 投入物の合成関数 (ケース A)

2.6.1　ケース A

ケース A では図 1 のような合成関数を考える．図は CES 型関数のツリーを表現しており，EOS は代替の弾力性の値である．可変投入物については，以下のような二段階の CES 型関数が仮定されている．

$$\mathrm{VA}^V = B_{\mathrm{VA}}^V(K^V, L^V) = (K^V)^{\theta^V}(L^V)^{1-\theta^V} \tag{3}$$

$$Q^V = A^V(\{I_i^V\}_i, \mathrm{VA}^V) = \min\left[\left\{\frac{I_i^V}{a_{Ii}^V}\right\}_i, \frac{\mathrm{VA}^V}{a_{\mathrm{VA}}^V}\right] \tag{4}$$

すなわち，まず資本 K^V，労働 L^V が Cobb-Douglas 型関数で合成され VA^V となる．そして，VA^V とその他の中間財 I_i^V がレオンチェフ型で合成され「可変投入物 Q^V」となるという関数である．a_{Ii}^V は可変投入物一単位を生産するのに必要な中間財 i の量，a_{VA}^V は可変投入物一単位を生産するのに必要な合成要素の量を表す係数である．

一方，固定投入物については，資本と労働しか利用されず，Cobb-Douglas 型関数で合成されると仮定している．よって，Q^F は次式のように表現できる．

$$Q^F = B_{\mathrm{VA}}^F(K^F, L^F) = (K^F)^{\theta^F}(L^F)^{1-\theta^F}$$

以上の合成関数を前提として投入物の価格指数を導出しよう．可変投入物の合成は，まず資本と労働を合成してから，他の中間財と合成するという二段階になっている．よって，まず，資本と労働を合成した合成生産要素の価格指数 p_{VA}^V を求めよう．

$$\begin{aligned}p_{\mathrm{VA}}^V &= \min_{K^V, L^V}\left\{rK^V + wL^V \middle| B_{\mathrm{VA}}^V(K^V, L^V) = 1\right\} \\ &= \left[\frac{r}{\theta^V}\right]^{\theta^V}\left[\frac{w}{1-\theta^V}\right]^{1-\theta^V}\end{aligned}$$

以上のように定義された生産要素の価格指数 p^V_{VA} とその他の中間財の価格を利用すると，可変投入物の価格指数は次式のように表現できる．

$$
\begin{aligned}
p^V &= \min_{I^V_i, \mathrm{VA}^V} \left\{ \sum_i p^I_i I^V_i + p^V_{\mathrm{VA}} \mathrm{VA}^V \middle| A^V(\{I^V_i\}, \mathrm{VA}^V) = 1 \right\} \\
&= \sum_i p^I_i a^V_{Ii} + p^V_{\mathrm{VA}} a_{\mathrm{VA}}
\end{aligned}
$$

合成関数としてレオンチェフ型を仮定しているので，各投入物価格の線形結合の形式となる．

同様に，固定投入物の価格指数を求めよう．

$$
\begin{aligned}
p^F_{\mathrm{VA}} &= \min_{K^F, L^F} \left\{ rK^F + wL^F \middle| B^F_{\mathrm{VA}}(K^F, L^F) = 1 \right\} \\
&= \left[\frac{r}{\theta^F} \right]^{\theta^F} \left[\frac{w}{1-\theta^F} \right]^{1-\theta^F}
\end{aligned}
$$

固定投入物には資本，労働しか利用されないので，その価格指数も資本，労働の価格にしか依存しない．以上のように求められた p^V，p^F を利用すると，総費用を次のように表現できる．

$$
C = p^V a^V Q + p^F Q^F
$$

次にケース A での投入物への需要を求めよう．まず，中間財 i への投入需要であるが，Shepard の補題より次式で与えられる．

$$
I_i = \frac{\partial C}{\partial p^I_i} = \frac{\partial p^V}{\partial p^I_i} a^V Q + \frac{\partial p^F}{\partial p^I_i} Q^F = a^V_{Ii} a^V Q + 0 = a^V_{Ii} a^V Q
$$

中間財は固定投入物には利用されないので，需要は可変投入物としての需要だけである．また，レオンチェフ型の合成関数を仮定していたので，需要は一定の投入係数に生産量がかかる形となり，投入物価格には依存しない．

同様に，資本への需要は次式となる．

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{\partial C}{\partial r} = \frac{\partial p^V}{\partial r} a^V Q + \frac{\partial p^F}{\partial r} Q^F = \frac{\partial p^V}{\partial p^V_{\mathrm{VA}}} \frac{\partial p^V_{\mathrm{VA}}}{\partial r} a^V Q + \frac{\partial p^F}{\partial r} Q^F \\
&= \frac{\theta^V}{r} p^V_{\mathrm{VA}} a^V_{\mathrm{VA}} a^V Q + \frac{\theta^F}{r} p^F Q^F
\end{aligned}
$$

資本は可変投入物としても固定投入物としても利用されるので，需要は両者を合せたものとなる．一方，労働への需要は次式となる．

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{\partial C}{\partial w} = \frac{\partial p^V}{\partial w} a^V Q + \frac{\partial p^F}{\partial w} Q^F = \frac{\partial p^V}{\partial p^V_{\mathrm{VA}}} \frac{\partial p^V_{\mathrm{VA}}}{\partial w} a^V Q + \frac{\partial p^F}{\partial w} Q^F \\
&= \frac{1-\theta^V}{w} p^V_{\mathrm{VA}} a^V_{\mathrm{VA}} a^V Q + \frac{1-\theta^F}{w} p^F Q^F
\end{aligned}
$$

ケース A では，可変投入物に関しても，固定投入物に関しても資本と労働の合成には Cobb-Douglas 型を利用しているが，両者は異なる関数と仮定してきた．これを同じ関数，つまり $B^V_{\mathrm{VA}}(\cdot) = B^F_{\mathrm{VA}}(\cdot) = B_{\mathrm{VA}}(\cdot)$ と仮定すると，

$$
\theta^V = \theta^F = \theta \qquad\qquad p^V_{\mathrm{VA}} = p^F = p_{\mathrm{VA}}
$$

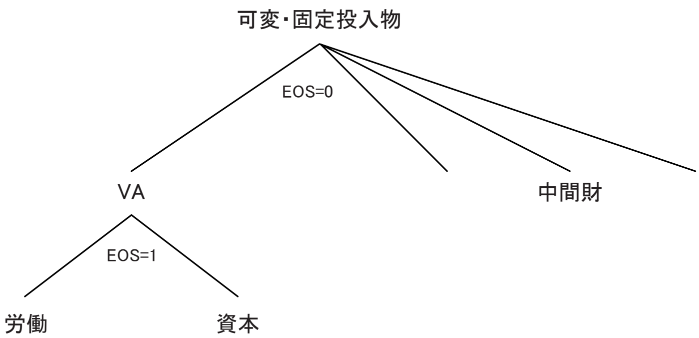

図 2: 投入物の合成関数 (ケース B)

となり，資本，労働需要は次のように修正される．

$$K = \frac{\theta}{r} p_{\mathrm{VA}} (a^V_{\mathrm{VA}} a^V Q + Q^F)$$
$$L = \frac{1-\theta}{w} p_{\mathrm{VA}} (a^V_{\mathrm{VA}} a^V Q + Q^F)$$

2.6.2　ケース B

ケース B では，可変投入物の合成関数はケース A と全く同じものを仮定する．さらに固定投入物の合成関数が可変投入物の関数と全く同じと仮定する．よって，図 2 の関数型が可変投入物についても固定投入物についても使われることになる．第 1 節で，可変投入物にも固定投入物にも労働が利用されるケースをとりあげたが，ケース B はそれと同じように可変投入物と固定投入物に全く同じものが利用されるという場合である．武田 (2007, 第 6 節) はケース B のタイプの合成関数を使っている[8]．

この場合，(4)–(3) 式の合成関数が可変投入物にも固定投入物にも利用される．よって，Q^V は

$$Q^V = A(\{I^V_i\}, \mathrm{VA}^V) = \min\left[\left\{\frac{I^V}{a_{Ii}}\right\}, \frac{\mathrm{VA}^V}{a_{\mathrm{VA}}}\right]$$
$$\mathrm{VA}^V = B_{\mathrm{VA}}(K^V, L^V) = (K^V)^\theta (L^V)^{1-\theta}$$

と表せる．同じように，Q^F は

$$Q^F = A(\{I^F_i\}, \mathrm{VA}^F) = \min\left[\left\{\frac{I^F}{a_{Ii}}\right\}, \frac{\mathrm{VA}^F}{a_{\mathrm{VA}}}\right]$$
$$\mathrm{VA}^F = B_{\mathrm{VA}}(K^F, L^F) = (K^F)^\theta (L^F)^{1-\theta}$$

となる．どちらにも同じ関数型を利用するので，関数に付いていた上添字 V はとれる．

[8]厳密に言うと，資本，労働の合成は Cobb-Douglas 型ではなく，CES 型を利用している．

合成関数が同じなので，可変投入物と固定投入物で価格指数も全く同じになる．

$$p_{\mathrm{VA}}=\left[\frac{r}{\theta}\right]^{\theta}\left[\frac{w}{1-\theta}\right]^{1-\theta}$$
$$p=\sum_i p_i^I a_{Ii}+p_{\mathrm{VA}}a_{\mathrm{VA}}$$

可変投入物と固定投入物の区別がなくなるので，やはり上添字 V はとれる．

以上のように求められた投入物の価格指数 p により費用は次のように表現される．

$$C=p(a^V Q+Q^F) \tag{5}$$

単一投入物で同じものが可変投入物にも固定投入物にも利用されるケース，つまり (2) 式と同じ形式で表現できることがわかる．

中間財 i への投入需要は再び Shepard の補題より次式となる．

$$I_i=\frac{\partial C}{\partial p_i^I}=\frac{\partial p}{\partial p_i^I}(a^V Q+Q^F)=a_{Ii}(a^V Q+Q^F)$$

同様に資本，労働への需要は以下の通りである．

$$K=\frac{\partial C}{\partial r}=\frac{\partial p}{\partial r}(a^V Q+Q^F)=\frac{\theta}{r}p_{\mathrm{VA}}a_{\mathrm{VA}}(a^V Q+Q^F)$$
$$L=\frac{\partial C}{\partial w}=\frac{\partial p}{\partial w}(a^V Q+Q^F)=\frac{1-\theta}{w}p_{\mathrm{VA}}a_{\mathrm{VA}}(a^V Q+Q^F)$$

参考文献

Fujita, Masahisa, Paul R. Krugman, and Anthony J. Venables (1999) *The Spatial Economy*, Cambridge, MA: MIT Press.

Krugman, Paul R. (1980) “Scale Economies, Product Differentiation and the Pattern of Trade,” *American Economic Review*, Vol. 70, pp. 950–959, December.

Mas-Colell, Andreu, Michael D. Whinston, and Jerry R. Green (1995) *Microeconomic Theory*, New York: Oxford University Press.

Varian, Hal R. (1992) *Microeconomic Analysis*, New York: W. W. Norton & Company, 3rd edition.

奥野正寛・鈴村興太郎 (1985) 『ミクロ経済学 I』，岩波書店．モダン・エコノミクス 1.

武田史郎 (2007) 「貿易政策を対象とした応用一般均衡分析」，3 月．RIETI Discussion Paper Series 07-J -010.