『関数型のレファレンス』

武田史郎*

関東学園大学経済学部経済学科
373–8515 群馬県太田市藤阿久町 200

平成 20 年 6 月 10 日

$Id: function_ref.tex,v 1.3 2008/06/10 01:46:29 st Exp $

概 要

関数型のレファレンス。CES 型関数、Cobb-Douglas 型関数、CDE 型関数等。

目 次

1 CES 型効用関数

効用関数が CES 型関数であるときの、支出関数、間接効用関数、補償需要関数、非補償需要関数等。

効用関数：

$$u = u(c_1, ..., c_I) = \left[\sum_i (\beta_i)(c_i)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

*email: <shiro.takeda@gmail.com>

支出関数：

$$e(\mathbf{p}, u) = u \left[\sum_i (\beta_i)^\sigma (p_i)^{1-\sigma} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

間接効用関数：

$$v(\mathbf{p}, m) = \frac{m}{\left[\sum_i (\beta_i)^\sigma (p_i)^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}}$$

補償需要関数 (ヒックスの需要関数)： Shepard の補題より

$$c_i^C(\mathbf{p}, u) = \frac{\partial e(\mathbf{p}, u)}{\partial p_i} = u \left[\frac{\beta_i e}{p_i u} \right]^\sigma = u \left[\frac{\beta_i}{p_i} \right]^\sigma \left[\sum_j (\beta_j)^\sigma (p_j)^{1-\sigma} \right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}$$

非補償需要 (マーシャルの需要関数)： Roy の恒等式より

$$c_i^u(\mathbf{p}, m) = -\frac{\partial v(\mathbf{p}, m)/\partial p_i}{\partial v(\mathbf{p}, m)/\partial m} = \left[\frac{\beta_i}{p_i} \right]^\sigma \frac{m}{\sum_j (\beta_j)^\sigma (p_j)^{1-\sigma}}$$

補償需要の価格弾力性：

$$\varepsilon_{ij}^C = \frac{\partial \ln c_i^C}{\partial \ln p_j} = -\sigma \delta_{ij} + \sigma \frac{(\beta_i)^\sigma (p_i)^{1-\sigma}}{\sum_k (\beta_k)^\sigma (p_k)^{1-\sigma}} = -\sigma \delta_{ij} + \sigma S_j$$

ただし、$S_i \equiv p_i c_i^C / e$ は i 財への支出シェア、δ_{ij} は

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } j = i \\ 0 & \text{if } j \neq i \end{cases}$$

非補償需要の価格弾力性：

$$\varepsilon_{ij}^u = \frac{\partial \ln c_i^u}{\partial \ln p_j} = -\sigma \delta_{ij} - (1-\sigma) \frac{(\beta_i)^\sigma (p_i)^{1-\sigma}}{\sum_k (\beta_k)^\sigma (p_k)^{1-\sigma}} = -\sigma \delta_{ij} - (1-\sigma) S_j$$

非補償需要の所得弾力性：

$$\eta_i = \frac{\partial \ln c_i^u}{\partial \ln m} = 1$$

2 Cobb-Douglas 型効用関数

効用関数：

$$u = u(c_1, ..., c_i) = \phi \prod_i (c_i)^{\alpha_i} \qquad \sum_i \alpha_i = 1$$

支出関数：

$$e(\mathbf{p}, u) = \frac{u}{\phi} \prod_i \left[\frac{p_i}{\alpha_i} \right]^{\alpha_i}$$

間接効用関数：

$$v(\mathbf{p}, m) = m\phi \prod_i \left[\frac{\alpha_i}{p_i}\right]^{\alpha_i}$$

補償需要関数：

$$c_i^C(\mathbf{p}, u) = \frac{\partial e(\mathbf{p}, u)}{\partial p_i} = \frac{\alpha_i e(\mathbf{p}, u)}{p_i}$$

非補償需要：

$$c_i^u(\mathbf{p}, m) = -\frac{\partial v(\mathbf{p}, m)/\partial p_i}{\partial v(\mathbf{p}, m)/\partial m} = \frac{\alpha_i m}{p_i}$$

補償需要の価格弾力性：

$$\varepsilon_{ij}^C = \frac{\partial \ln c_i^C}{\partial \ln p_j} = -(\delta_{ij} - \alpha_j)$$

非補償需要の価格弾力性：

$$\varepsilon_{ij}^u = \frac{\partial \ln c_i^u}{\partial \ln p_j} = -\delta_{ij}$$

非補償需要の所得弾力性：

$$\eta_i = \frac{\partial \ln c_i^u}{\partial \ln m} = 1$$

3　余暇を含んだ CES 型効用関数

効用関数

$$u = u(c, z) = \left[\beta_1 (c)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta_2 (z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{1}$$

c は消費、z は余暇である。

p を消費の価格、w を賃金率、l を労働供給、T を労働所得以外の所得とすると、予算制約は次式で与えられる。

$$pc \leq wl + T \tag{2}$$

余暇と労働に使える総労働時間を $\bar{l}$ 置くと、$l = \bar{l} - z$ と表現できる。また、$m \equiv w\bar{l} + T$ と定義する。すると予算制約は

$$pc + wz \leq m$$

と書き換えることができる。

(1) の効用関数、(2) の予算制約式より、余暇への非補償需要は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} z(p, w, m) &= \left[\frac{\beta_2}{w}\right]^{\sigma} \frac{m}{(\beta_1)^{\sigma}(p)^{1-\sigma} + (\beta_2)^{\sigma}(w)^{1-\sigma}} \\ &= \left[\frac{\beta_2}{w}\right]^{\sigma} \frac{w\bar{l} + T}{(\beta_1)^{\sigma}(p)^{1-\sigma} + (\beta_2)^{\sigma}(w)^{1-\sigma}} \end{aligned}$$

労働供給は次式で与えられる。

$$l(p, w, m) = \bar{l} - z$$

余暇需要の賃金弾力性：

$$\varepsilon_z = \frac{\partial \ln z}{\partial \ln w} = \left[\frac{wz}{m} - 1\right]\sigma + \frac{wl}{m} = (\theta_z - 1)\sigma + \theta_l \tag{3}$$

ただし、θ_z、θ_l は以下のように定義される。

$$\theta_z \equiv \frac{wz}{m} \qquad \theta_l \equiv \frac{wl}{m}$$

4 CDE 型関数

効用関数が CDE 関数 (constant difference of elasticities function, Hertel, Horridge and Pearson 1992) であるケース。

支出関数：効用関数が CDE 関数であるとき、支出関数は次のように implicit に定義される。

$$\sum_i \beta_i^{\sigma_i} u^{(1-\sigma_i)\gamma_i} \left[\frac{p_i}{e(\mathbf{p}, u)}\right]^{1-\sigma_i} = 1$$

$\sigma_i = \sigma$、$\gamma_i = 1$ のとき、普通の CES 関数となる。

間接効用関数：

$$e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m)) = m$$

補償需要関数：

$$c_i^C(\mathbf{p}, u) = \frac{\beta_i^{\sigma_i} u^{(1-\sigma_i)\gamma_i}(1-\sigma_i)\left[\frac{p_i}{e(p,u)}\right]^{-\sigma_i}}{\sum_j \beta_j^{\sigma_i} u^{(1-\sigma_i)\gamma_j}(1-\sigma_i)\left[\frac{p_j}{e(p,u)}\right]^{1-\alpha_j}}$$

非補償需要関数：

$$c_i^u(\mathbf{p}, m) = c_i^C(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m))$$

補償需要の価格弾力性：

$$\varepsilon_{ij}^C = \frac{\partial \ln c_i^C}{\partial \ln p_j} = -\sigma_i \delta_{ij} + \left[\sigma_i + \sum_k (1-\sigma_k) S_k - (1-\sigma_j)\right] S_j$$

非補償需要の価格弾力性：

$$\varepsilon_{ij}^u = \frac{\partial \ln c_i^u}{\partial \ln p_j} = \varepsilon_{ij}^C - \eta_i S_j$$

非補償需要の所得弾力性：

$$\eta_i = \frac{\partial \ln c_i^u}{\partial \ln m} = \frac{1}{\sum_j \gamma_j S_j}\left[(1-\sigma_i)\gamma_i - \sum_k (1-\sigma_k)\gamma_k S_k\right] + \sigma_i + \sum_k (1-\sigma_k) S_k$$

5　代替の弾力性のカリブレーション

5.1　消費と余暇の間の代替の弾力性のカリブレーション

シミュレーションでは、労働供給の賃金弾力性の値を外生的に与えることにより、消費と余暇の間の代替の弾力性をカリブレートすることがある。以下、その方法を示す。

まず、(3) を σ について解く。

$$\sigma = \frac{-\varepsilon_z + wl/m}{1 + wz/m} = \frac{-\varepsilon_z + \theta_l}{1 - \theta_z} \tag{4}$$

$l = \bar{l} - z$ という関係より、労働供給の賃金弾力性 ε_l と余暇需要の賃金弾力性 ε_z は以下の関係を持つ。

$$\varepsilon_z = -\frac{\partial \ln l}{\partial \ln w} \frac{l}{\bar{l} - l} = -\varepsilon_l \frac{l}{\bar{l} - l} = -\varepsilon_l \frac{\theta_l}{\delta_l - \theta_l} \tag{5}$$

ただし、$\delta_l \equiv w\bar{l}/m$ である。

(4) と (5) より代替の弾力性を以下のように表現できる。

$$\sigma = \frac{1}{1 - \theta_z} \left[\varepsilon_l \frac{\theta_l}{\delta_l - \theta_l} + \theta_l \right]$$

シェアを表す変数 θ_l、δ_l はベンチマークデータから既知であるので、ベンチマークの労働供給の賃金弾力性を与えてやれば、この関係により代替の弾力性をカリブレートできる。

5.2　供給の価格弾力性に基づくカリブレーション

$$z = f(x, y) = \left[\beta_x (x)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta_z (z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

z は生産量、x は可変要素、z は特殊要素。z の供給の価格弾力性を与えて、代替の弾力性 σ をカリブレートする。

z の供給の価格弾力性

$$\varepsilon^S \equiv \frac{\partial \ln z}{\partial \ln p_z} = \frac{\partial \ln z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial p_z} \frac{\partial p_z}{\partial \ln p_z} = \frac{1}{z} f_x(x, y) \frac{\partial x}{\partial p_z} p_z$$

where $f_x(x, y) \equiv \partial f(x, y)/\partial x$.

利潤最大化条件

$$p_z \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = p_x \tag{6}$$

(6) より

$$\frac{\partial x}{\partial p_z} = -\frac{f_x(x, y)}{p_z f_{xx}(x, y)} = -\frac{p_x}{p_z^2 f_{xx}(x, y)}$$

where $f_{xx}(x, y) \equiv \partial^2 f(x, y)/\partial x^2$.

$$f_x(x,y) = \left[\beta_x(x)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta_z(z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{1}{\sigma-1}} \beta_x(x)^{-\frac{1}{\sigma}}$$

$$f_{xx}(x,y) = \left[\left(\beta_x(x)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta_z(z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \beta_x(x)^{-\frac{1}{\sigma}}\right]^2 \left(\beta_x(x)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta_z(z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{-\frac{\sigma}{\sigma-1}} \frac{1}{\sigma} + \left[\left(\beta_x(x)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta_z(z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \beta_x(x)^{-\frac{1}{\sigma}}\right] \frac{1}{\sigma x}$$

$$f_{xx} = \frac{p_x}{p_z}\frac{1}{\sigma}\left[\frac{p_x}{p_z}\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right] = \frac{p_x}{p_z x \sigma}\left[\theta - 1\right]$$

ただし、

$$\theta \equiv \frac{p_x x}{p_z z}$$

$$\varepsilon^S = -\frac{1}{z}\frac{p_x}{p_z}\frac{p_x p_z x \sigma}{p_z^2 p_x(\theta-1)} p_z = \frac{\theta\sigma}{1-\theta} \tag{7}$$

(7) を σ について解く。

$$\sigma = \frac{\varepsilon(1-\theta)}{\theta}$$

ベンチマークにおける x のシェア θ と価格弾力性 ε^S の値を決めてやれば、この関係によって代替の弾力性 σ をカリブレートすることができる。

非補償労働供給の弾力性 ε_l ではなく、補償労働供給の弾力性 ε_l^C を使う場合には、

$$\varepsilon_l = \varepsilon_l^C + w\phi_l$$

という関係を使えばよい。ただし、$\phi_l \equiv \partial l/\partial m$ である。

6 技術進歩

CES 生産関数で技術水準のパラメータが入るケース。

生産関数：

$$y = \left[\sum_i \beta_i(\lambda_i x_i)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

λ_i は技術水準パラメータ。

費用関数：

$$c(\mathbf{p},y) = y\left[\sum_i (\beta_i)^\sigma \left[\frac{p_i}{\lambda_i}\right]^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

要素需要関数：

$$x_i(\mathbf{p},y) = \frac{y}{\lambda_i}\left[\frac{\beta_i\lambda_i c}{p_i y}\right]^\sigma = \frac{y}{\lambda_i}\left[\frac{\beta_i\lambda_i}{p_i}\right]^\sigma \left[\sum_j \beta_j^\sigma\left(\frac{p_i}{\lambda_i}\right)^{1-\sigma}\right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}$$

参考文献

Hertel, Thomas W., J. Mark Horridge, and Ken R. Pearson (1992) "Mending The Family Tree: A Reconciliation of The Liniearization and Levels Schools of AGE Modelling," *Economic Modelling*, Vol. 9, No. 4, pp. 385-407, October.