『関数型のレファレンス』

武田史郎*

2011/02/12

概要

関数型のレファレンス。CES型関数、Cobb-Douglas型関数、CDE型関数等。

内容

1　CES型効用関数

効用関数が CES 型関数であるときの、支出関数、間接効用関数、補償需要関数、非補償需要関数等。

効用関数：

$$u = u(c_1, \dots, c_I) = \left[\sum_i (\beta_i)(c_i)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

支出関数：

$$\begin{aligned} e(\mathrm{p}, u) &\equiv \min_{\{c_i\}_i} \left[\sum_i p_i c_i | u(c_1, \dots, c_I) = u\right] \\ &= u\left[\sum_i (\beta_i)^{\sigma}(p_i)^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \end{aligned}$$

間接効用関数；

*Email: <shiro.takeda@gmail.com>

$$v(\mathrm{p},m) \equiv \max_{\{c_i\}_i}\left[u(c_1,\ldots,c_I)|\sum_i p_i c_i \le m\right]$$
$$= \frac{m}{\left[\sum_i (\beta_i)^\sigma (p_i)^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}}$$

補償需要関数（ヒックスの需要関数）：Shepard の補題より

$$c_i^C(\mathrm{p},u) = \frac{\partial e(\mathrm{p},u)}{\partial p_i} = u\left[\frac{\beta_i e}{p_i u}\right]^\sigma = u\left[\frac{\beta_i}{p_i}\right]^\sigma \left[\sum_j (\beta_j)^\sigma (p_j)^{1-\sigma}\right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}$$

非補償需要（マーシャルの需要関数）：Royの恒等式より

$$c_i^u(\mathrm{p},m) = -\frac{\partial v(\mathrm{p},m)/\partial p_i}{\partial v(\mathrm{p},m)/\partial m} = \left[\frac{\beta_i}{p_i}\right]^\sigma \frac{m}{\sum_j (\beta_j)^\sigma (p_j)^{1-\sigma}}$$

補償需要の価格弾力性：

$$\varepsilon_{ij}^C = \frac{\partial \mathrm{ln} c_i^C}{\partial \mathrm{ln} p_j} = -\sigma\delta_{ij} + \sigma\frac{(\beta_i)^\sigma (p_i)^{1-\sigma}}{\sum_k (\beta_k)^\sigma (p_k)^{1-\sigma}} = -\sigma\delta_{ij} + \sigma S_j$$

ただし、$S_i \equiv p_i c_i^C/e$はi財への支出シェア、 δ_{ij}は

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } j = i \\ 0 & \text{if } j \neq i \end{cases}$$

非補償需要の価格弾力性：

$$\varepsilon_{ij}^u = \frac{\partial \mathrm{ln} c_i^u}{\partial \mathrm{ln} p_j} = -\sigma\delta_{ij} - (1-\sigma)\frac{(\beta_i)^\sigma (p_i)^{1-\sigma}}{\sum_k (\beta_k)^\sigma (p_k)^{1-\sigma}} = -\sigma\delta_{ij} - (1-\sigma)S_j$$

非補償需要の所得弾力性：

$$\eta_i = \frac{\partial \mathrm{ln} c_i^u}{\partial \mathrm{ln} m} = 1$$

2　Cobb-Douglas 型効用関数

効用関数：

$$u = u(c_1,\ldots,c_i) = \phi\prod_i (c_i)^{\alpha_i} \qquad \sum_i \alpha_i = 1$$

支出関数：

$$e(\mathrm{p},u) \equiv \min_{\{c_i\}_i}\left[\sum_i p_i c_i | u(c_1,\ldots,c_I) = u\right] = \frac{u}{\phi}\prod_i \left[\frac{p_i}{\alpha_i}\right]^{\alpha_i}$$

間接効用関数：

$$v(\mathrm{p},m) \equiv \max_{\{c_i\}_i}\left[u(c_1,\ldots,c_I)|\sum_i p_i c_i \le m\right] = m\phi\prod_i\left[\frac{\alpha_i}{p_i}\right]^{\alpha_i}$$

補償需要関数：

$$c_i^C(\mathrm{p},u) = \frac{\partial e(\mathrm{p},u)}{\partial p_i} = \frac{\alpha_i e(\mathrm{p},u)}{p_i}$$

非補償需要：

$$c_i^u(\mathrm{p},m) = -\frac{\partial v(\mathrm{p},m)/\,\partial p_i}{\partial v(\mathrm{p},m)/\,\partial m} = \frac{\alpha_i m}{p_i}$$

補償需要の価格弾力性：

$$\varepsilon_{ij}^C = \frac{\partial \ln c_i^C}{\partial \ln p_j} = -(\delta_{ij} - \alpha_j)$$

非補償需要の価格弾力性：

$$\varepsilon_{ij}^u = \frac{\partial \ln c_i^u}{\partial \ln p_j} = -\delta_{ij}$$

非補償需要の所得弾力性：

$$\eta_i = \frac{\partial \ln c_i^u}{\partial \ln m} = 1$$

3　余暇を含んだ CES 型効用関数

効用関数：　効用は余暇と消費に依存する。

$$u = u(c,z) = \left[\beta_1(c)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta_2(z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{1}$$

cは消費量、zは余暇量である。

pを消費の価格、w賃金率、lを労働供給、Tを労働所得以外の所得とすると、予算制約は次式で与えられる。

$$pc \le wl + T \tag{2}$$

余暇と労働に使える総労働時間を$\bar{l}$置くと、$l = \bar{l} - z$と表現できる。また、$m \equiv w\bar{l} + T$と定義する。すると予算制約は

$$pc + wz \le m$$

と書き換えることができる。

(1)の効用関数、(2)の予算制約式より、余暇への非補償需要は次式で与えられる。

$$z(p,w,m) = \left[\frac{\beta_2}{w}\right]^{\sigma}\frac{m}{(\beta_1)^{\sigma}(p)^{1-\sigma} + (\beta_2)^{\sigma}(w)^{1-\sigma}}$$

$$= \left[\frac{\beta_2}{w}\right]^{\sigma} \frac{w\bar{l} + T}{(\beta_1)^{\sigma}(p)^{1-\sigma} + (\beta_2)^{\sigma}(w)^{1-\sigma}}$$

労働供給は次式で与えられる。

$$l(p, w, m) = \bar{l} - z$$

余暇需要を書き換えると

$$z\left(1, \frac{w}{p}, \frac{m}{p}\right) = \left[\frac{\beta_2}{w/p}\right]^{\sigma} \frac{\left(\frac{w}{p}\right)\bar{l} + \frac{T}{p}}{(\beta_1)^{\sigma} + (\beta_2)^{\sigma}\left(\frac{w}{p}\right)^{1-\sigma}}$$

のように実質賃金w/pと実質非労働所得T/pの関数として表現できる。

余暇需要の賃金弾力性：

$$\varepsilon_z = \frac{\partial \ln z}{\partial \ln w} = \left[\frac{wz}{m} - 1\right]\sigma + \frac{wl}{m} = (\theta_z - 1)\sigma + \theta_l \qquad (3)$$

ただし、θ_z、θ_lは以下のように定義される。

$$\theta_z \equiv \frac{wz}{m} \qquad \theta_l \equiv \frac{wl}{m}$$

4　CDE型関数

効用関数が CDE 関数（constant difference of elasticities function, Hertel, Horridge and Pearson 1992）であるケース。

支出関数：効用関数が CDE 関数であるとき、支出関数$e(\mathrm{p}, u)$は次のように implicit に定義される。

$$\sum_i \beta_i^{\sigma_i} u^{(1-\sigma_i)\gamma_i} \left[\frac{p_i}{e(\mathrm{p}, u)}\right]^{1-\sigma_i} = 1$$

$\sigma_i = \sigma$、$\gamma_i = 1$のとき、普通 CES 関数となる。

間接効用関数：

$$e(\mathrm{p}, v(\mathrm{p}, m)) = m$$

補償需要関数：

$$c_i^C(\mathrm{p}, u) = \frac{\beta_i^{\sigma_i} u^{(1-\sigma_i)\gamma_i}(1-\sigma_i)\left[\frac{p_i}{e(p,u)}\right]^{-\sigma_i}}{\sum_j \beta_j^{\sigma_i} u^{(1-\sigma_i)\gamma_j}(1-\sigma_i)\left[\frac{p_j}{e(p,u)}\right]^{1-\alpha_j}}$$

非補償需要関数：

$$c_i^u(\mathrm{p}, m) = c_i^C(\mathrm{p}, v(\mathrm{p}, m))$$

補償需要の価格弾力性：

$$\varepsilon_{ij}^{C} = \frac{\partial \mathrm{ln} c_i^C}{\partial \mathrm{ln} p_j} = -\sigma_i \delta_{ij} + \left[\sigma_i + \sum_k (1-\sigma_k) S_k - (1-\sigma_j)\right] S_j$$

非補償需要の価格弾力性：

$$\varepsilon_{ij}^{u} = \frac{\partial \mathrm{ln} c_i^u}{\partial \mathrm{ln} p_j} = \varepsilon_{ij}^{C} - \eta_i S_j$$

非補償需要の所得弾力性：

$$\eta_i = \frac{\partial \mathrm{ln} c_i^u}{\partial \mathrm{ln} m} = \frac{1}{\sum_j \gamma_j S_j}\left[(1-\sigma_i)\gamma_i - \sum_k (1-\sigma_k)\gamma_k S_k\right] + \sigma_i + \sum_k (1-\sigma_k) S_k$$

5　代替の弾力性のカリブレーション

5.1　消費と余暇の間の代替の弾力性のカリブレーション

シミュレーションでは、労働供給の賃金弾力性の値を外生的に与えることにより、 消費と余暇の間の代替の弾力性をカリブレートすることがある。以下、その方法を示す。

まず、(3)をσについて解く。

$$\sigma = \frac{-\varepsilon_z + wl/m}{1 + wz/m} = \frac{-\varepsilon_z + \theta_l}{1 - \theta_z} \tag{4}$$

$l = \bar{l} - z$という関係より、労働供給の賃金弾力性ε_lと余暇需要の賃金弾力性ε_zは以下の関係を持つ。

$$\varepsilon_z = -\frac{\partial \mathrm{ln} l}{\partial \mathrm{ln} w}\frac{l}{\bar{l} - l} = -\varepsilon_l \frac{l}{\bar{l} - l} = -\varepsilon_l \frac{\theta_l}{\delta_l - \theta_l} \tag{5}$$

ただし、$\delta_l \equiv w\bar{l}/m$である。

(4)と(5)より代替の弾力性を 以下のように表現できる。

$$\sigma = \frac{1}{1-\theta_z}\left[\varepsilon_l \frac{\theta_l}{\delta_l - \theta_l} + \theta_l\right]$$

シェアを表す変数θ_l、δ_lはベンチマークデータから既知であるので、ベンチマークの労働供給の賃金弾力性を与えてやれば、この関係により代替の弾力性をカリブレートできる。

非補償労働供給の弾力性ε_lではなく、補償労働供給の弾力性ε_l^Cを使う場合には、

$$\varepsilon_l = \varepsilon_l^C + \phi_l$$

という関係を使えばよい。ただし、$\phi_l \equiv wl/m$である。

5.2　供給の価格弾力性に基づくカリブレーション

全ての生産要素が可変要素であるのなら，生産関数の一次同次性より供給曲線は水平になるが，特殊要素（specific factor）が存在する場合には供給曲線は右上りとなる。特殊要素が存在するケースでは，供給の価格弾力性の値により生産要素間の代替の弾力性をカリブレートするという方法が利用されることがある。

例えば，次のような CES 型生産関数を考える。

$$z = f(x,y) = \left[\beta_x(x)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta_z(z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

ここで y は特殊要素であるとし，zの供給の価格弾力性を与えて、代替の弾力性σをカリブレートする。

zの供給の価格弾力性：

$$\varepsilon^S \equiv \frac{\partial \ln z}{\partial \ln p_z} = \frac{\partial \ln z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p_z}\frac{\partial p_z}{\partial \ln p_z} = \frac{1}{z} f_x(x,y)\frac{\partial x}{\partial p_z} p_z$$

ただし、$f_x(x,y) \equiv \frac{\partial f(x,y)}{\partial}$である。

利潤最大化条件：

$$p_z \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = p_x \tag{6}$$

(6) より

$$\frac{\partial x}{\partial p_z} = -\frac{f_x(x,y)}{p_z f_{xx}(x,y)} = -\frac{p_x}{p_z^2 f_{xx}(x,y)}$$

ただし、$f_{xx}(x,y) \equiv \partial^2 f(x,y)/\partial x^2$.

$$f_x(x,y) = \left[\beta_x(x)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta_z(z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{1}{\sigma-1}} \beta_x(x)^{-\frac{1}{\sigma}}$$

$$f_{xx}(x,y) = \left[\left(\beta_x(x)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta_z(z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \beta_x(x)^{-\frac{1}{\sigma}}\right]^2 \left(\beta_x(x)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta_z(z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{-\frac{\sigma}{\sigma-1}} \frac{1}{\sigma} + \left[\left(\beta_x(x)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta_z(z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \beta_x(x)^{-\frac{1}{\sigma}}\right] \frac{1}{\sigma x}$$

$$f_{xx} = \frac{p_x}{p_z}\frac{1}{\sigma}\left[\frac{p_x}{p_z}\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right] = \frac{p_x}{p_z x \sigma}[\theta - 1]$$

ただし、

$$\theta \equiv \frac{p_x x}{p_z z}$$

$$\varepsilon^S = -\frac{1}{z}\frac{p_x}{p_z}\frac{p_x p_z x \sigma}{p_z^2 p_x(\theta-1)} p_z = \frac{\theta\sigma}{1-\theta} \tag{7}$$

(7) をσについて解く。

$$\sigma = \frac{\varepsilon(1-\theta)}{\theta}$$

ベンチマークにおけるxのシェアθと価格弾力性ε^Sの値を決めてやれば、この関係によって代替の弾力性σをカリブレートすることができる。

6　技術進歩

CES 生産関数で技術水準のパラメータが入るケース。

生産関数：

$$y = \left[\sum_i \beta_i(\lambda_i x_i)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

λ_iは技術水準パラメータ。

費用関数：

$$c(\mathrm{p}, y) = y\left[\sum_i (\beta_i)^\sigma \left[\frac{p_i}{\lambda_i}\right]^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

要素需要関数：

$$x_i(\mathrm{p}, y) = \frac{y}{\lambda_i}\left[\frac{\beta_i \lambda_i c}{p_i y}\right]^\sigma = \frac{y}{\lambda_i}\left[\frac{\beta_i \lambda_i}{p_i}\right]^\sigma \left[\sum_j \beta_j^\sigma \left(\frac{p_i}{\lambda_i}\right)^{1-\sigma}\right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}$$

参考文献

Hertel, Thomas W., J. Mark Horridge, and Ken R. Pearson (1992) “Mending The Family Tree: A Reconciliation of The Liniearization and Levels Schools of AGE Modelling,” *Economic Modelling*, Vol. 9, No. 4, pp. 385-407, October.