CDE 関数についてのノート

武田史郎

関東学園大学経済学部経済学科
373–8515 群馬県太田市藤阿久町 200

e-mail: <zbc08106@park.zero.ad.jp>

2007 年 8 月

概 要

GTAP の標準的モデルで利用されている CDE 関数 (constant difference of elasticities function, Hertel, Horridge and Pearson 1992) についての説明[1].

Case 1

Hertel et al. (1992)，Hertel (1997)，McDougall (2003) の表現方法.

支出関数： CDE 型効用関数に対応する支出関数は次式で implicit に定義される.

$$\sum_i \beta_i U^{\alpha_i \gamma_i} \left[\frac{p_i}{e(\mathbf{p}, U)} \right]^{\alpha_i} = 1$$

間接効用関数： 間接効用関数 $v(\mathbf{p}, M)$ は次式で定義される.

$$e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, M)) = M$$

補償需要関数：

$$c_i^C(\mathbf{p}, U) = \frac{\beta_i U^{\alpha_i \gamma_i} \alpha_i \left[\frac{p_i}{e(p,U)} \right]^{\alpha_i - 1}}{\sum_j \beta_j U^{\alpha_j \gamma_j} \alpha_j \left[\frac{p_j}{e(p,U)} \right]^{\alpha_j}}$$

非補償需要関数：

$$c_i^U(\mathbf{p}, M) = c_i^C(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, M))$$

[1] GTAP モデルについては，Hertel (1997)，McDougall (2003) 等が詳しい.

補償需要の価格弾力性：

$$\varepsilon_{ij}^C = \frac{\partial \ln c_i^C}{\partial \ln p_j} = S_j \left[1 - \alpha_i + \sum_k \alpha_k S_k - \alpha_j \right] - \delta_{ij}(1 - \alpha_i)$$

where

$$S_j \equiv \frac{p_j c_j^C}{e}$$
$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } j = i \\ 0 & \text{if } j \neq i \end{cases}$$

非補償需要の価格弾力性：

$$\varepsilon_{ij}^U = \frac{\partial \ln c_i^U}{\partial \ln p_j} \varepsilon_{ij}^C - \eta_i S_j$$

非補償需要の所得弾力性：

$$\eta_i = \frac{\partial \ln c_i^U}{\partial \ln M} = \frac{1}{\sum_j \gamma_j S_j} \left[\alpha_i \gamma_i - \sum_k \alpha_k \gamma_k S_k \right] + (1 - \alpha_i) + \sum_k \alpha_k S_k$$

Case 2

Case 1 とはパラメータの表現方法を若干変えたケース．実質的には Case 1 と何も変わらないが，Case 2 の表現方法では，$\sigma_i = \sigma$，$\gamma_i = 1$ のとき，代替の弾力性が σ の CES 型関数となる．

支出関数：　CDE 型効用関数に対応する支出関数は次式で implicit に定義される．

$$\sum_i \beta_i^{\sigma_i} U^{(1-\sigma_i)\gamma_i} \left[\frac{p_i}{e(\mathbf{p}, U)} \right]^{1-\sigma_i} = 1$$

間接効用関数：　間接効用関数 $v(\mathbf{p}, M)$ は次式で定義される．

$$e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, M)) = M$$

補償需要関数：

$$\begin{aligned} c_i^C(\mathbf{p}, U) &= \frac{\beta_i^{\sigma_i} U^{(1-\sigma_i)\gamma_i} (1-\sigma_i) \left[\frac{p_i}{e(p,U)} \right]^{-\sigma_i}}{\sum_j \beta_j^{\sigma_j} U^{(1-\sigma_j)\gamma_j} (1-\sigma_j) \left[\frac{p_j}{e(p,U)} \right]^{1-\sigma_j}} \\ &= \frac{e(p,U)}{p_i} \frac{\beta_i^{\sigma_i} U^{(1-\sigma_i)\gamma_i} (1-\sigma_i) \left[\frac{p_i}{e(p,U)} \right]^{1-\sigma_i}}{\sum_j \beta_j^{\sigma_j} U^{(1-\sigma_j)\gamma_j} (1-\sigma_j) \left[\frac{p_j}{e(p,U)} \right]^{1-\sigma_j}} \end{aligned}$$

非補償需要関数：

$$c_i^U(\mathbf{p}, M) = c_i^C(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, M))$$

補償需要の価格弾力性：

$$\varepsilon_{ij}^{C} = \frac{\partial \ln c_i^C}{\partial \ln p_j} = S_j \left[\sigma_i + \sum_k (1-\sigma_k) S_k - (1-\sigma_j) \right] - \delta_{ij}\sigma_i$$

where

$$S_j \equiv \frac{p_j c_j^C}{e}$$
$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } j = i \\ 0 & \text{if } j \neq i \end{cases}$$

非補償需要の価格弾力性：

$$\varepsilon_{ij}^{U} = \frac{\partial \ln c_i^U}{\partial \ln p_j} \varepsilon_{ij}^{C} - \eta_i S_j$$

非補償需要の所得弾力性：

$$\eta_i = \frac{\partial \ln c_i^U}{\partial \ln M} = \frac{1}{\sum_j \gamma_j S_j} \left[(1-\sigma_i)\gamma_i - \sum_k (1-\sigma_k)\gamma_k S_k \right] + \sigma_i + \sum_k (1-\sigma_k) S_k$$

パラメータのカリブレーション

Case 1 の表現を前提にして，パラメータのカリブレーションを考える.

GTAP モデルの方法

1. $\bar{c}_i^C, \bar{U}, \bar{e}, \bar{p}_i$ はベンチマークデータより決まる.
2. α_i と γ_i は外生的に与える。
3. 以下の連立方程式をつくる。

$$c_i^C = \frac{\beta_i U^{\alpha_i \gamma_i} \alpha_i \left[\frac{p_i}{e(p,U)} \right]^{\alpha_i - 1}}{\sum_j \beta_j U^{\alpha_j \gamma_j} \alpha_j \left[\frac{p_j}{e(p,U)} \right]^{\alpha_j}} \qquad i = 1, \cdots, I \tag{1}$$

$$\sum_i \beta_i U^{\alpha_i \gamma_i} \left[\frac{p_i}{e} \right]^{\alpha_i} = 1 \tag{2}$$

4. I 本の (1) のうち一本は redundant なので，一本を除く[2]。(1) の $I-1$ 本と (2) の一本を合わせた計 I 本の連立方程式によって I 個の $\{\beta_i\}$ を解く。

[2] $I-1$ 本の (1) 式と，(2) 式が満たされれば，残りの一本の (1) 式は自動的に満たされるため.

参考文献

Hertel, Thomas W. ed. (1997) *Global Trade Analysis: Modeling and Applications*, New York: Cambridge University Press.

Hertel, Thomas W., J. Mark Horridge, and Ken R. Pearson (1992) "Mending The Family Tree: A Reconciliation of The Liniearization and Levels Schools of AGE Modelling," *Economic Modelling*, Vol. 9, No. 4, pp. 385–407, October.

McDougall, Robert (2003) "A New Regional Household Demand System for GTAP." GTAP Technical Paper No. 20, September.