

CGE 分析入門

第1章：企業と消費者の行動*

武田史郎†

Date: 2018/07/24,
Version 1.4

目次

1	導入	2
2	企業の行動	3
2.1	利潤最大化行動	3
2.1.1	利潤関数の1次同次性、供給関数、投入需要関数の0次同次性	4
2.1.2	利潤最大化とゼロ利潤	5
2.2	費用最小化行動	7
2.2.1	費用関数と投入需要関数の同次性	7
2.3	単位費用関数を利用した利潤最大化の表現	8
2.4	関数例	8
2.4.1	生産関数	8
2.4.2	利潤最大化条件	9
2.4.3	費用最小化条件	9
3	消費者の行動	10
3.1	効用最大化行動	10
3.1.1	非補償需要の0次同次性	11
3.2	支出最小化行動	11
3.3	関数例	12
3.3.1	効用関数	12
3.3.2	効用最大化	12
3.3.3	支出最小化	13
3.4	等価変分と補償変分(※)	14
3.4.1	効用関数が1次同次関数のケース	14
	参考文献	15

*ファイルの配布場所: <http://shirotaleda.org/ja/research-ja/cge-howto.html>

†京都産業大学経済学部. Website: <http://shirotaleda.org/ja/>

4	補足 (※)	16
4.1	生産者の行動についての補足	16
4.1.1	Hotelling の補題：利潤関数と生産量、投入量の関係	16
4.1.2	Shephard の補題：費用関数と投入需要関数の関係	16
4.2	CES 関数の代替の弾力性	17
4.3	消費者の行動についての補足	18
4.3.1	Roy の恒等式	18
4.3.2	効用最大化行動と支出最小化行動の関係	19
4.3.3	支出関数についての Shephard の補題	19
5	問題	20
6	履歴	20

1 導入

今回の内容について。

- 「応用一般均衡分析 (computable general equilibrium analysis、CGE 分析)」では「一般均衡モデル」を利用する。ここでの一般均衡モデルとは、1) 複数の生産者 (企業)、複数の消費者 (家計)、政府など多数の経済主体を考慮し、2) 複数の財、複数の生産要素からなる多数の市場を考慮した上で、経済全体を捉えるようなモデルのことである¹。
- その一般均衡モデルを考える前に、まずそのモデルに現れる経済主体、つまり企業 (生産者)、消費者の行動をどのように捉えるか解説する。
- 基本的には普通のミクロ経済学の最初の方のパートで解説されているような内容である。ただし、CGE 分析をおこなう際に重要になる内容に限定している。
- 参考になるミクロ経済学のテキストを挙げておく。これらを参考にしながら読めば、この章の内容をより深く理解できるはずである。
 - 奥野・鈴木 (1985)、Varian (1992)、Mas-Colell et al. (1995)。
 - ただし、上の 3 冊ともかなり古いテキストであるので、入手が難しいかもしれない。今回取り上げるような内容 (CGE 分析で利用する内容) は、ゲーム理論、情報の経済学、メカニズムデザイン等のトピックと違い、ミクロ経済学の中でも古くからあるトピックであるので、テキストが古いこと自体は問題ではないが。
- スペースの都合上、様々な式、関数の導出方法を省略している。詳しくは同じ場所で配布されている第 A-1 章の文書を見てほしい。
- ※付きの節はとりあえずスキップしてもかまわない。

¹一般均衡モデルは CGE 分析だけではなく、例えば、マクロ経済学でも利用されている。CGE 分析での「一般均衡モデル」は本文で説明しているようなモデルであるが、マクロ経済学で利用する一般均衡モデルはそれとはかなり異なっている。具体的には、マクロ経済学の一般均衡モデルは財の生産部門は 1 つか 2 つ程度とすることが多く、多数の財 (部門) を想定することは少ない。同じ「一般均衡モデル」であっても、CGE 分析におけるモデルとマクロ経済学におけるモデルは特徴かなり違っている。

[本文書を読むにあたっての注意]

シミュレーションをするということは、1) 経済主体の行動を数学的に表現し、2) さらに様々な関数を特定化してモデルを表現する ということであるので、以下では数式の表現がたくさん出てくる。また、CGE 分析のシミュレーションをおこなうには実際にそれらの数式をプログラムで表現していくことになる。煩雑な数式が多いが、それぞれの数式がどのような前提から導かれたかを理解することが望ましい。ただし、数式の導出方法を「覚える」という必要はない。どのような前提からどのような方法で導かれたかがだいたいわかれば十分である。

2 企業の行動

まず、企業側の行動を考える。企業は利潤を最大化するように行動すると仮定する。また、完全競争市場を仮定し、企業はプライステイカー（価格受容者）とする。

企業の生産関数は次式のように表現されるとする。

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\mathbf{x}) \quad (1)$$

ただし、 q は生産量、 x_i は投入物 i の投入量、 $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ は投入物ベクトルである。つまり、企業は n 個（種類）の投入物を投入することで一種類の生産物を生産しているということである。また、生産技術は「規模に関して収穫一定」の性質を持つと仮定する。つまり、生産関数 $f(\cdot)$ は一次同次性を満たすということである²。さらに、生産関数は「quasi-concave な関数（準凹関数）」であると³。これは等量曲線を描いたとき、等量曲線が原点に対して凸の形状をしていることを意味する。別の言い方をすると技術的限界代替率が逡減するということである。

p_y を生産物の価格、 p_i を投入物 i の価格、 $\mathbf{p} = \{p_1, \dots, p_n\}$ を投入物価格ベクトルとする。このとき企業の利潤 π は次のように表現できる

$$\pi = p_y f(\mathbf{x}) - \sum_i p_i x_i \quad (2)$$

$p_y f(\mathbf{x})$ が収入、 $\sum_i p_i x_i$ が生産費用（投入物への支払い額）であり、その差額が利潤となる。

2.1 利潤最大化行動

企業はプライステイカー、かつ利潤を最大化するように行動すると仮定した。これは、価格を所与とし、 π を最大化するように投入量 \mathbf{x} を決定するということである。数学的には次のような問題として表現できる。

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}} \pi &= p_y f(\mathbf{x}) - \sum_i p_i x_i & (3) \\ &\text{given } p_y \text{ and } \mathbf{p} \end{aligned}$$

[利潤最大化の条件]

²これは、 $\forall \lambda > 0$ に対し $f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$ が成り立つということである。

³後に生産関数には CES 関数を仮定するので、この仮定は実際に満たされる。

(3) 式の問題は制約なしの最適化問題であるので、目的関数である利潤を投入物で偏微分したものが 0 に等しいという条件が最適化の条件となる。つまり、次式が最適化の条件となる。

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_i} = p_y \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} - p_i = 0 \quad \rightarrow \quad p_y \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = p_i \quad i = 1, \dots, n \quad (4)$$

左辺は「限界生産物価値」、右辺は「投入物価格」であり、この条件は「各投入物の限界生産物価値が投入物の価格に等しくなるように投入量を決定する」ということ意味する。 n 本の (4) 式を解くことで、最適な $\mathbf{x}(p_y, \mathbf{p}) = \{x_1(p_y, \mathbf{p}), \dots, x_n(p_y, \mathbf{p})\}$ を求めることができる⁴。

投入量が決定すれば (1) 式から利潤を最大化する生産量 $y(p_y, \mathbf{p}) = f[\mathbf{x}(p_y, \mathbf{p})]$ が決まる。また、最大化された利潤は次の関係で求めることができる⁵。

$$\pi(p_y, \mathbf{p}) = p_y y(p_y, \mathbf{p}) - \sum_i p_i x_i(p_y, \mathbf{p})$$

[最大化 (最適化) の条件についての注] (4) 式が利潤最大化の条件であると述べたが、これは「一階の条件 (first order condition)」である。利潤最大化を考えるにはさらに「二階の条件 (second order condition)」が成り立つかどうかとも考慮しなければならないが、CGE 分析では二階の条件が成り立つ関数 (CES 関数等) を利用することが多いので、以下では二階の条件については特に言及しないことにする⁶。他の最大化 (あるいは、最小化) 問題の場合も同様である。二階の条件について詳しくは、例えば、Simon and Blume (1994) を見て欲しい。

2.1.1 利潤関数の 1 次同次性、供給関数、投入需要関数の 0 次同次性

$\pi(p_y, \mathbf{p})$ は価格について 1 次同次の性質を持つ。つまり、 $\forall \lambda > 0$ について $\pi(\lambda p_y, \lambda \mathbf{p}) = \lambda \pi(p_y, \mathbf{p})$ が成り立つ。生産物の価格も投入物の価格も λ 倍されれば、利潤も λ 倍になるということである。これは (2) 式の定義から明らかである。さらに、1 次同次関数の導関数は 0 次同次関数という性質と Hotelling の補題より、

$$y(\lambda p_y, \lambda \mathbf{p}) = y(p_y, \mathbf{p}) \quad x_i(\lambda p_y, \lambda \mathbf{p}) = x_i(p_y, \mathbf{p})$$

が成り立つ⁷。つまり、供給関数と投入需要関数は価格について 0 次同次である。これは生産物の価格も投入物の価格もともに λ 倍されても、利潤を最大化する供給量、投入量は変わらないということである。この性質は「生産者の行動が相対的な価格にのみ依存している」ということを示唆している。

⁴ 実際には、ここで考えているモデルでは最適な \mathbf{x} は一意 (unique) には決まらない。 $f(\mathbf{x})$ は仮定より 1 次同次の関数である。従って、その導関数である $f_i(\mathbf{x}) = \partial f(\mathbf{x}) / \partial x_i$ は 0 次同次となる。つまり、次式が成り立つ。

$$f_i(\lambda \mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x})$$

これは \mathbf{x}^* が (4) 式を満たすとすると、 $\bar{\mathbf{x}} = \lambda \mathbf{x}^* (\lambda > 0)$ を満たす任意の $\bar{\mathbf{x}}$ も (4) 式を満たすということになる。従って、(4) 式だけでは投入量は一意には決まらないことになる。一意に決まらないので、本来は $\mathbf{x}(p_y, \mathbf{p})$ という関数の表現をすることは不適切であるが、ここではその問題はとりあえず棚上げしておく。後に CGE 分析をおこなうときには $\mathbf{x}(p_y, \mathbf{p})$ という表現はそもそも利用しないし、実際のモデルを解く際には生産側だけではなく需要側も考慮するので、投入量は一意に決まることになり、問題は生じない。

⁵ 脚注 4 で説明したように、最適な投入量は一意には決まらない。よって、生産量についても一意には決まらず、本来は $y(p_y, \mathbf{p})$ のような関数の表現はできないことに注意して欲しい (第 2.1.2 で示すように、利潤は常に 0 になるので一意に決まる)。後に一般均衡モデルを考えるときには、 $y(p_y, \mathbf{p})$ という表現は利用しない。

⁶ つまり、一階の条件が満たされれば、(局所的な) 最適化が保証されるということである。

⁷ Hotelling の補題について詳しくは第 4.1.1 節を見て欲しい。

2.1.2 利潤最大化とゼロ利潤

同次関数についての Euler の定理より⁸、1 次同次の生産関数 $f(x)$ について次の関係が成立する。

$$f(\mathbf{x}) = \sum_i \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} x_i$$

これより利潤は次のように書き換えることができる。

$$\pi = p_y f(\mathbf{x}) - \sum_i p_x x_i = \sum_i \left[p_y \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} - p_i \right] x_i$$

ここに利潤最大化の条件 (4) を適用すると [] 内はゼロとなるので、結局利潤はゼロになる。これは、1) 規模に関して収穫一定の技術を持ち、2) プライステイカーとして利潤最大化を図る企業にとって、最大化された利潤は 0 ということである⁹。言い換えると、収入は全て投入物への支払いに利用されてしまい、利潤は残らないということになる。CGE 分析では 1 と 2 の性質を持つ企業を前提とすることが多い。従って、CGE 分析では企業の利潤は均衡においてゼロとなるケースが多い。

[ゼロ利潤についての注]

現実には多くの企業は儲け（利益）を生み出しているのであるから（逆に損失を出しているケースもあるが）、「企業の利潤がゼロとなる」ケースを考えることをおかしいと思うかもしれない。しかし、これは利潤（利益）の定義に起因することであり、CGE モデル（あるいは、ミクロ経済学のモデル）において利潤がゼロとなる状況を想定することと現実の企業が利益を上げていることが矛盾しているわけではない。

CGE モデルでは、普通の会計上では企業の利益に相当する部分（CGE 分析で使うデータでいうと産業連関表の営業余剰の部分）を「資本の利用に対する支払い」とみなすことが多い。つまり、通常の会計上で利益とみなす部分を費用の一種とみなすということである。通常であれば利益とみなされる部分をそのまま費用に読み替えるので、定義上、ちょうど利益（利潤）がゼロということになるのである。

[「資本の利用に対する支払い」とは？（※）]

上の注で「資本の利用に対する支払い」という概念がでてきたので、ついでにそれについても説明しておく。

経済学の一般均衡モデルで企業の生産活動を考えるとき、生産に利用される生産要素の一つとして「資本 (capital)」が想定されることが多い（他は労働など）。ここで言う「資本」とは主に固定資本に当るようなもので、具体的には土地、建物、生産設備などのようなものを指している。この「資本」という生産要素について一般均衡モデルでは非常に特殊な想定を置くことが多い。

まず、現実の「資本」について考えてみよう。「資本」のうち一部（特に、土地や建物等）は企業が誰かから借りているものであるが、その多くは企業が自分自身で保有しているものであろう。

⁸同次関数についての Euler の定理とは、 k 次同次の関数 $f(x)$ について次の関係が成り立つというものである。

$$k f(\mathbf{x}) = \sum_i \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} x_i$$

⁹逆に言えば、規模に関して収穫一定の技術を持たない、あるいは企業がプライステイカーとして行動しないような場合には、これは成り立たない。

そして、その自分が保有している資本をどのように調達したかと言えば、自分自身による投資（設備投資）によるものが多いであろう。つまり、「資本」の多くは企業が自分で投資によって蓄積したものであり、企業が保有しているものだということである。

一方、一般均衡モデルでは資本について次のような想定を置くことが多い：1) 「資本」は家計が保有している、2) 企業は家計から生産活動のために「資本」を借りて用いている、3) その代わりに企業は家計にレンタル料を支払う。上述の通り、本来「資本」は企業が保有していると考えることが現実的であるが、あたかも家計が資本を保有し、それを企業に貸しているものとみなすということである。上の注において「資本の利用に対する支払い」と出てきたのは、この「資本を借りていることへの支払い」のことである。

普通に考えれば、「家計が生産設備を保有し、それを企業に貸している」など完全なフィクションで、全く非現実な想定としか思えないであろう。しかし、お金の流れを考えれば、一般均衡モデルの想定が必ずしも現実から遊離しているとも言えない。それは次のような議論に基づく。まず、一般均衡モデルにおける「家計が投資をして、資本を蓄積し、それを企業に貸す」という想定では資本蓄積（投資）の費用と資本からの収益について次が成り立つ。

- 資本蓄積（投資） → 家計が費用を負担
- 資本からの収益 → 家計に還元

一方、現実を考えると、企業が設備投資によって資本を蓄積するので資本蓄積の費用は企業が負担し、資本を用いて生産活動をおこなったことによる収益は企業が得ることになるだろう。しかし、企業の所有者は投資家の多くを占める家計である。企業が資本蓄積の費用を負担するといっても、その大本をたどれば結局は投資家としての家計が提供した資金である。さらに、企業が利益を得たとしても、それは結局、利子、配当、株価の上昇として投資家である家計に還元されることになる。よって、現実にも、資本蓄積（投資）の費用は家計が負担し、資本からの収益は家計に還元されると考えることができる。こう考えると、経済学のモデルの想定は、形式上は現実とは異なるが、実質的には現実とそれほど異なるわけではない。このようなお金の流れの類似性によって一般均衡モデルの妥当性がどれだけ正当化できるかについては議論の余地があるが、いずれにせよ一般均衡モデルでは資本・投資の扱いについて現実とは形式上かなり異なる想定を置いていることに注意して欲しい。

資本についての以上のような想定によって、一般均衡モデルでは「資本の価格」と「資本のレンタル価格 (rental price)」の二つの価格を区別する必要がある。例えば、営業に使う自動車を例にして考えれば、前者は「営業車を購入する価格」であり、後者は「営業車をリースで（例えば、1年間）借りる価格」である¹⁰。後者の方が当然低い価格となる。CGE分析において資本が生産要素として扱われ、その生産要素としての資本に支払われる価格はあくまで「レンタル価格」である。ただし、CGE分析でも動学モデルを考える場合には「資本のレンタル価格」ではなく、「資本の価格」が出てくることがある。興味がある人は動学的CGEモデルを利用している Takeda (2007) を見て欲しい。

なお、CGEモデルにおいても、現実をそのまま反映するように、1) 家計ではなく企業が設備投資をおこない、2) 家計は投資家（株主）として企業に資金を提供するという形でモデルを構築している研究者もいる。例えば、Goulder (1996), Bovenberg and Goulder (1996), Bovenberg and Goulder (1995) である。ただ、このように資本、投資を扱っているモデルは非常に少ないのが現状である。

¹⁰資本（設備等）を買うということは結局設備投資であるから、前者の「資本の価格」は「投資財の価格」に近いものである。

2.2 費用最小化行動

第2.1節では利潤最大化行動から企業を捉えたが、「双対性より利潤最大化行動をとる生産者は費用最小化行動をとっている」¹¹。よって、費用関数を定義することができる。特にここでは1次同次の生産関数を仮定しているので、生産量一単位あたりの単位費用関数 $c(\mathbf{p})$ を定義することができる¹²

$$c(\mathbf{p}) \equiv \min_{\mathbf{z}} \left[\sum_i p_i z_i \mid f(\mathbf{z}) = 1 \right]$$

すなわち、単位費用関数とは、投入物の価格を所与としたとき、1単位の生産量を実現する最小の費用を表す関数である。

(単位) 費用最小化問題の解法 上の費用最小化問題は制約付きの最適化問題であるので、ラグランジュ未定乗数法を利用して解く。この問題に対するラグランジュアンは次式となる。

$$\mathcal{L} = \sum_i p_i z_i - \lambda [f(\mathbf{z}) - 1]$$

[費用最小化の条件]

費用最小化の条件は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_i} = p_i - \lambda \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (5)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = f(\mathbf{z}) - 1 = 0 \quad (6)$$

(5)式、(6)式を解けば費用を最小化する投入量 $z(\mathbf{p}) = \{z_1(\mathbf{p}), \dots, z_n(\mathbf{p})\}$ が決まる。さらにそれを使えば単位費用関数 $c(\mathbf{p}) = \sum_i p_i z_i(\mathbf{p})$ が導出できる。

2.2.1 費用関数と投入需要関数の同次性

単位費用関数と単位投入需要関数には次の性質が成り立つ。

$$c(\lambda \mathbf{p}) = \lambda c(\mathbf{p})$$

¹¹生産サイドにおける双対性（費用関数、条件付き要素需要関数、Shephard's lemma）については、奥野・鈴木（1985）、Mas-Colell et al. (1995, Chap.5) を参照

¹²生産関数が1次同次であるとき、費用関数が単位費用と生産量に分離できることは以下のように示せる。まず、 $\tilde{c}(\mathbf{p}, y)$ で通常の費用関数、つまり \mathbf{p} を所与としたとき生産量 y を実現するのに必要な最小費用を表すとする。 $\tilde{c}(\mathbf{p}, y)$ は数式では次式のように定義される。

$$\tilde{c}(\mathbf{p}, y) \equiv \min_{\mathbf{x}} \left[\sum_i p_i x_i \mid f(\mathbf{x}) = y \right]$$

生産関数が1次同次関数であれば、これは次のように書き換えていくことができる。

$$\begin{aligned} \tilde{c}(\mathbf{p}, y) &= \min \left[\sum_i p_i x_i \mid f(\mathbf{x}/y) = 1 \right] = \min \left[\sum_i p_i \tilde{x}_i y \mid f(\tilde{\mathbf{x}}) = 1 \right] \\ &= y \min \left[\sum_i p_i \tilde{x}_i \mid f(\tilde{\mathbf{x}}) = 1 \right] = y \tilde{c}(\mathbf{p}, 1) \end{aligned}$$

$\tilde{c}(\mathbf{p}, 1)$ は単位費用を表す。これが本文内の $c(\mathbf{p})$ である。

$$z_i(\lambda \mathbf{p}) = z_i(\mathbf{p})$$

つまり、単位費用は投入物価格について 1 次同次で、単位投入需要関数は 0 次同次ということである。

2.3 単位費用関数を利用した利潤最大化の表現

この単位費用関数を使うと企業の利潤を次式で表現できる。

$$\pi = p_y y - c(\mathbf{p})y$$

この場合の利潤最大化条件は次式となる。

$$\frac{\partial \pi}{\partial y} = p_y - c(\mathbf{p}) = 0 \quad (7)$$

つまり、「価格＝単位費用」が利潤最大化の条件である¹³。

2.4 関数例

以下で、関数を特定化してこれまでの企業の行動を考えよう。

2.4.1 生産関数

ここまで生産関数は一次同次＋準凹関数という仮定をつけた以外は一般的な形で表現してきた。CGE 分析では生産関数に「CES (constant elasticity of substitution) 関数」、あるいはその特殊形である「Cobb-Douglas 関数」や「Leontief 関数」を利用することが非常に多い。以下では、生産関数を CES 関数に特定化し、これまでの結果を表現してみる。

生産関数を次のような CES 関数とする。

$$y = f(\mathbf{x}) = \phi \left[\sum_i \alpha_i (x_i)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (8)$$

ただし、 ϕ 、 α_i ($\sum_i \alpha_i = 1$)、 σ は外生的に設定されるパラメータであり、特に σ は投入物間の「代替の弾力性」を表すパラメータである。上の関数形では任意の投入物間の代替の弾力性の値が外生的に一定のパラメータ σ に等しくなるため CES 関数と呼ばれる。(8) 式を利用してもよいが以下では $\beta_i = \phi^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \alpha_i$ と置き、

$$y = f(\mathbf{x}) = \left[\sum_i \beta_i (x_i)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (9)$$

という表現を利用していくことにする。以下、 β_i を「ウェイトパラメータ」と呼ぶことにする。

¹³ 収入＝価格 × 生産量、総費用＝単位費用 × 生産量であるので、「価格＝単位費用」であれば、「収入＝総費用」であり、その結果、「利潤＝0」となる。第 2.1.2 節で説明したことが、ここでも確認できる。

2.4.2 利潤最大化条件

生産関数が (9) 式であるときには、(4) 式の利潤最大化条件は次式となる。

$$p_y \left[\sum_j \beta_j (x_j)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{1}{\sigma-1}} \beta_i (x_i)^{-\frac{1}{\sigma}} - p_i = p_y y^{\frac{1}{\sigma}} \beta_i (x_i)^{-\frac{1}{\sigma}} - p_i = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

脚注 4 で書いたように、この条件は一意には解くことができない。つまり、 $\mathbf{x}^* = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ が上の条件を満たすのなら、 $\bar{\mathbf{x}} = \lambda \mathbf{x}^*$ を満たす任意の $\bar{\mathbf{x}}$ も同様に満たす。第 2.1 節では、解を $x(\mathbf{p})$ のような関数として表現できるような説明をしているが、実際には $x(\mathbf{p})$ というように関数の形で表現することはできないことに注意して欲しい。

2.4.3 費用最小化条件

同様に生産関数が CES 関数であるときの費用最小化問題を考える。費用最小化の条件 (5) 式、(6) 式は次式となる。

$$p_i - \lambda y^{\frac{1}{\sigma}} \beta_i (z_i)^{-\frac{1}{\sigma}} = 0 \quad (10)$$

$$y = 1 \quad (11)$$

$$y = \left[\sum_i \beta_i (z_i)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (12)$$

これを解いてみる。まず (10)~(12) 式より

$$z_i = \left[\frac{\lambda \beta_i}{p_i} \right]^{\sigma} y$$

となる。これを (11) 式、(12) 式に代入する。

$$\begin{aligned} \left[\sum_i \beta_i \left(\left[\frac{\lambda \beta_i}{p_i} \right]^{\sigma} y \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} &= 1 \\ \rightarrow y \lambda^{\sigma} \left[\sum_i \beta_i^{\sigma} p_i^{1-\sigma} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} &= 1 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{\left[\sum_j \beta_j^{\sigma} p_j^{1-\sigma} \right]^{\frac{1}{\sigma-1}} y^{\frac{1}{\sigma}}} \end{aligned}$$

これを (10) 式に代入し直す。

$$\begin{aligned} p_i - \frac{1}{\left[\sum_j \beta_j^{\sigma} p_j^{1-\sigma} \right]^{\frac{1}{\sigma-1}} y^{\frac{1}{\sigma}}} y^{\frac{1}{\sigma}} \beta_i (z_i)^{-\frac{1}{\sigma}} &= 0 \quad \rightarrow \quad p_i - \frac{1}{\left[\sum_j \beta_j^{\sigma} p_j^{1-\sigma} \right]^{\frac{1}{\sigma-1}}} \beta_i (z_i)^{-\frac{1}{\sigma}} = 0 \\ \rightarrow p_i z_i^{\frac{1}{\sigma}} &= \beta_i \left[\sum_i \beta_i^{\sigma} p_i^{1-\sigma} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \end{aligned}$$

これを z_i について解くと次式を得る。

$$z_i(\mathbf{p}) = \left[\frac{\beta_i}{p_i} \right]^{\sigma} \left[\sum_j \beta_j^{\sigma} p_j^{1-\sigma} \right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \quad (13)$$

これが単位費用を最小化する単位投入量（生産量一単位当たりの投入量）を表す関数、単位投入需要関数である。さらに、単位投入量を費用に代入してやれば単位費用関数を求めることができる。

$$c(\mathbf{p}) = \sum_i p_i z_i(\mathbf{p}) = \sum_i p_i \left[\frac{\beta_i}{p_i} \right]^\sigma \left[\sum_j \beta_j^\sigma p_j^{1-\sigma} \right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} = \left[\sum_j \beta_j^\sigma p_j^{1-\sigma} \right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \sum_i \beta_i^\sigma p_i^{1-\sigma}$$

これより単位費用関数 $c(\mathbf{p})$ は次式となる。

$$c(\mathbf{p}) = \left[\sum_i \beta_i^\sigma p_i^{1-\sigma} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \quad (14)$$

この単位費用関数を用いて (7) 式の利潤最大化条件を表すと

$$p_y - c(\mathbf{p}) = p_y - \left[\sum_i \beta_i^\sigma p_i^{1-\sigma} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} = 0$$

となる。

3 消費者の行動

次に、消費者の行動を考える。以下では、ある代表的な一人の消費者の行動を考えていく。その消費者は n 種類の財を消費しているとする。消費者の効用（満足度）は次のような効用関数で表現されるとする。

$$u = g(d_1, \dots, d_n) = g(\mathbf{d})$$

u は効用水準、 d_i は財 i の需要量（消費量）、 $\mathbf{d} = \{d_1, \dots, d_n\}$ は需要（消費）ベクトルである。効用が消費だけではなく、余暇などにも依存するケースもあるが、ここではまず消費にのみ依存するケースを想定する。効用関数は quasi-concave な関数（準凹関数）であるとする¹⁴。消費者は m だけの所得を得ているとする。この所得 m はとりあえず外生的であるとする。消費者はプライステイカーであり、効用を最大化するように需要量を選択すると仮定する。 p_i を財 i の価格、 $\mathbf{p} = \{p_1, \dots, p_n\}$ を財価格ベクトルとする。

3.1 効用最大化行動

消費者の効用最大化行動は次のように表現できる

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{d}} \quad & u = g(\mathbf{d}) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_i p_i d_i = m \\ \text{given} \quad & \mathbf{p} = \{p_1, \dots, p_n\}, m \end{aligned}$$

$\sum_i p_i d_i = m$ は予算制約式である。つまり、予算制約の下で効用が最大になるように消費量（需要量）を決定するということである。この効用最大化問題は制約付きの最適化問題であるので、費用

¹⁴効用関数が quasi-concave な関数であるとは、無差別曲線を描いたときに原点に対して凸な形状になるということである。効用関数についても後に CES 関数を仮定するので、この仮定は実際に満たされることになる。

最小化問題のときのようにラグランジュ未定乗数法を利用して解く。ラグランジュアンは次式で与えられる。

$$\mathcal{L} = g(\mathbf{d}) - \lambda \left[\sum_i p_i d_i - m \right]$$

効用最大化の条件は次のように表現できる。

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_i} = \frac{\partial g(\mathbf{d})}{\partial d_i} - \lambda p_i = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (15)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = - \left[\sum_i p_i d_i - m \right] = 0 \quad (16)$$

(15) 式、(16) 式を解けば、効用を最大化する需要量を求めることができる。それは財価格と所得の関数となるので、 $d(\mathbf{p}, m) = \{d_1(\mathbf{p}, m), \dots, d_n(\mathbf{p}, m)\}$ というように表現できる。この効用を最大化する需要量を表す関数を「マーシャルの需要関数 (Marshallian demand function)」、あるいは「非補償需要関数 (uncompensated demand function)」と呼ぶ。

さらにこの需要量を効用関数に代入すれば最大化された効用を表す関数が求められる。

$$v(\mathbf{p}, m) = g(\mathbf{d}(\mathbf{p}, m)) = g(d_1(\mathbf{p}, m), \dots, d_n(\mathbf{p}, m)) \quad (17)$$

この関数を「間接効用関数 (indirect utility function)」と呼ぶ。

3.1.1 非補償需要の 0 次同次性

非補償需要関数は価格と所得について 0 次同次の性質を持つ。つまり $\forall \lambda > 0$ に対して

$$d_i(\lambda \mathbf{p}, \lambda m) = d_i(\mathbf{p}, m)$$

が成り立つ。価格と所得がともに λ 倍になっても予算制約は全く変わらないので、効用を最大化する需要量も変わらないということである。第 2.1.1 節において、生産者の行動が相対的な価格のみ依存しているということを見たが、非補償需要関数の 0 次同次性は消費者についても同様なことが成り立っているということの意味している。

3.2 支出最小化行動

利潤最大化行動をとる企業が費用最小化行動をとっていたのと同様、効用最大化行動をとる消費者は支出最小化行動をとっている。以下では、支出最小化行動の面から消費者の行動を考える。消費者の支出最小化行動は次のように表せる

$$e(\mathbf{p}, u) \equiv \min_{\mathbf{h}} \left[\sum_i p_i h_i \mid g(\mathbf{h}) = u \right]$$

つまり、支出最小化行動とは、 \mathbf{p} という価格の下で、ある u という効用水準を実現するのに支出が最小となる需要量を選択するという行動である。 $e(\mathbf{p}, u)$ は最小化された支出を表す関数であり、支出関数と呼ばれる。

支出最小化問題は生産で考えた費用最小化問題と形式が非常によく似ている。ただし、費用最小化の部分では総費用ではなく生産一単位当たりの費用 (単位費用) の最小化を考えたのに対し、こ

ここでは総支出の最小化を考えるという違いがある。もし生産関数と同様に効用関数も 1 次同次関数であると仮定すれば、費用最小化のときと同様、単位支出を定義できるので、費用最小化の表現とほぼ同じ表現になる。

支出最小化問題は制約付きの最適化問題なのでラグランジュ未定乗数法を利用して解く。

$$\mathcal{L} = \sum_i p_i h_i - \lambda [g(\mathbf{h}) - u]$$

支出最小化の条件は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_i} = p_i - \lambda \frac{\partial g(\mathbf{h})}{\partial h_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (18)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = g(\mathbf{h}) - u = 0 \quad (19)$$

(18) 式、(19) 式を解けば支出を最小化する需要量 $\mathbf{h}(\mathbf{p}, u) = \{h_1(\mathbf{p}, u), \dots, h_n(\mathbf{p}, u)\}$ が決まる。さらにそれを使えば支出関数 $e(\mathbf{p}, u) = \sum_i p_i h_i(\mathbf{p}, u)$ が求まることになる。支出を最小化する需要量を表す関数を「ヒックスの需要関数 (Hicksian demand function)」、あるいは「補償需要関数 (compensated demand function)」と呼ぶ。

支出関数、補償需要関数について次の性質が成り立つ。

$$e(\lambda \mathbf{p}, u) = \lambda e(\mathbf{p}, u)$$

$$h_i(\lambda \mathbf{p}, u) = h_i(\mathbf{p}, u)$$

つまり、支出関数は価格について 1 次同次であり、非補償需要関数は価格について 0 次同次ということである。

3.3 関数例

関数を特定化してこれまでの消費者の行動を考えよう。

3.3.1 効用関数

効用関数を次のような CES 関数とする。

$$u = g(\mathbf{d}) = \left[\sum_i \beta_i (d_i)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

まず、準備として $g(\mathbf{d})$ の導関数を求めておく。

$$g_i(\mathbf{d}) = \frac{\partial g(\mathbf{d})}{\partial d_i} = \left[\sum_j \beta_j (d_j)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{1}{\sigma-1}} \beta_i (d_i)^{-\frac{1}{\sigma}} = u^{\frac{1}{\sigma}} \beta_i (d_i)^{-\frac{1}{\sigma}}$$

3.3.2 効用最大化

(15) 式、(16) 式の効用最大化条件は次の 3 式となる。

$$u^{\frac{1}{\sigma}} \beta_i (d_i)^{-\frac{1}{\sigma}} - \lambda p_i = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (20)$$

$$-\left[\sum_i p_i d_i - m\right] = 0 \quad (21)$$

$$u = \left[\sum_i \beta_i (d_i)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (22)$$

(20) 式より

$$d_i = \left[\frac{\beta_i}{\lambda p_i}\right]^{\sigma} u$$

となるが、これを (21) 式に代入すると

$$\lambda = \left[\frac{u}{m} \sum_i \beta_i^{\sigma} p_i^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{\sigma}}$$

を得る。これを (20) 式に代入し直すと

$$d_i(\mathbf{p}, m) = \left[\frac{\beta_i}{p_i}\right]^{\sigma} \frac{m}{\sum_j \beta_j^{\sigma} p_j^{1-\sigma}}$$

となる。これが非補償需要関数である。さらに、これを効用関数に代入すると次式を得る。

$$g(\mathbf{d}(\mathbf{p}, m)) = \left[\sum_i \beta_i \left[\left(\frac{\beta_i}{p_i}\right)^{\sigma} \frac{m}{\sum_j \beta_j^{\sigma} p_j^{1-\sigma}}\right]^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = \left[\sum_j \beta_j^{\sigma} p_j^{1-\sigma}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \frac{m}{\sum_j \beta_j^{\sigma} p_j^{1-\sigma}}$$

これより間接効用関数は次式となる。

$$v(\mathbf{p}, m) = g(\mathbf{d}(\mathbf{p}, m)) = \frac{m}{\left[\sum_j \beta_j^{\sigma} p_j^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}}$$

3.3.3 支出最小化

こちらについては費用最小化とほぼ同じであるので導出方法は省略する（ただし、費用関数のときは単位費用であったが、ここでは単位支出ではなく総支出という違いはある）。

補償需要関数

$$h_i(\mathbf{p}, u) = u \left[\frac{\beta_i}{p_i}\right]^{\sigma} \left[\sum_j \beta_j^{\sigma} p_j^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \quad (23)$$

支出関数

$$e(\mathbf{p}, u) = u \left[\sum_j \beta_j^{\sigma} p_j^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \quad (24)$$

3.4 等価変分と補償変分（※）

消費者が効用最大化を目的として行動していると想定すれば、政策の変化等のなんらかのショックが生じたときに、それが消費者にとって良かったのか、悪かったのかは効用がどう変化したかによって判断するのが自然であろう。実際、一般均衡モデルを利用した理論的な分析では、消費者（あるいは、家計）の効用の変化で政策の善し悪しを判断することが多い。

しかし、モデルにおいて効用を計算できるとしても、効用は直接観察できるものではなく、簡単に定量化できる変数ではないので、モデルの効用を実際のデータと対応させるようなことは難しい。また、経済学の専門家には「効用」という概念はごく当たり前のものであるが、専門家以外には馴染みが薄く理解しづらいということもある。そこで、「効用の変化」という指標に代わってよく利用される指標が「等価変分 (equivalent variation)」と「補償変分 (compensating variation)」である。特に、「等価変分」は消費者（家計）にとっての善し悪しを測る指標として CGE 分析において非常によく利用されている。以下では、この等価変分と補償変分について簡単に説明する。

ショックが生じる前と生じた後の状態を考える。ショックが生じる前の状態を 0、生じた後の状態を 1 とし、 $\{p^0, u^0\}$ をショックが生じる前の価格と効用の組み合わせとし、 $\{p^1, u^1\}$ をショックが生じた後の価格と効用の組み合わせとする。このとき、等価変分と補償変分はそれぞれ以下のように定義される。

$$EV \equiv e(p^0, u^1) - e(p^0, u^0)$$

$$CV \equiv e(p^1, u^1) - e(p^1, u^0)$$

ただし、 $e(\)$ は支出関数である。

ショックによって価格や所得が変化することで効用水準が変化する。等価変分はその効用水準の変化が仮に所得水準の変化のみで起きたとしたら、どれだけの所得の変化に相当するかを表す概念である。例えば、 $u^0 = 10$ 、 $u^1 = 5$ 、 $EV = 50$ とすると、ショックによる効用の 10 から 5 への低下は、50 だけ所得が減少したときの効果と同じということになる。

一方、補償変分はショックが起きたとしてもいくらの所得をもらえればショック前の効用水準を維持できるかを表している。 $u^0 = 10$ 、 $u^1 = 5$ 、 $CV = 50$ なら、ショックが生じることで効用は 5 に減少してしまうのだが、所得が 50 増加すればショック前と同じ 10 という効用を維持できるということである。若干、考え方は異なるが、等価変分も補償変分もショックを所得の変化に置き換えて考えるという点では同じである。

似たような概念であるが、一般的には「 $EV \neq CV$ 」であり、両者の値はずれてくる。CGE 分析においては通常 EV の方が用いられる。

ある政策によって「効用が 10 から 5 へ低下した、あるいは 50%低下した」と言うよりも、「その政策の（効用への）効果は所得が 50 だけ減少するのと同じである」と言う方がいくぶん理解しやすいであろう。特に CGE 分析は主に政策の分析に使われるので、経済学の非専門家に対してその結果を説明する機会が多い。それが CGE で等価変分がよく利用される理由だと考えられる。

3.4.1 効用関数が 1 次同次関数のケース

効用関数が 1 次同次関数であるなら、支出関数は

$$e(p, u) = \bar{e}(p)u$$

のように表現できる。ただし、 $\tilde{e}(p) = e(p, 1)$ である。これは支出関数が価格を含む部分と効用水準を含む部分に分離できるということである。これを使うと、EV は

$$EV = \tilde{e}(p^0) [u^1 - u^0]$$

と書ける。

CGE 分析では EV 自体も使われるが、EV を「実質所得の変化額」とみなし、その EV を初期均衡の所得で割った値が「実質所得の変化率」を表すものとしてよく利用される。初期均衡における所得を m^0 とすると、 $m^0 = \tilde{e}(p^0)u^0$ であることから、

$$\frac{EV}{m^0} = \frac{\tilde{e}(p^0) [u^1 - u^0]}{\tilde{e}(p^0)u^0} = \frac{u^1 - u^0}{u^0}$$

となる。これは EV を初期均衡の所得水準で割った値で表現される「実質所得の変化率」は効用水準の変化率に等しくなっているということである。逆に言えば、効用水準の変化率を計算すれば、それが実質所得の変化率になっていると解釈できるということである。

参考文献

Bovenberg, A. Lans and Lawrence H. Goulder (1995) “Costs Of Environmentally Motivated Taxes In The Presence Of Other Taxes: General Equilibrium Analyses,” URL: <http://www.nber.org/papers/w5117.pdf>.

——— and ——— (1996) “Optimal Environmental Taxation in the Presence of Other Taxes: General-Equilibrium Analysis,” *American Economic Review*, Vol. 86, No. 4, pp. 985–1000, URL: <http://www.jstor.org/stable/2118315>.

Goulder, Lawrence H. (1996) “An Intertemporal General Equilibrium Model for Analyzing U.S. Energy and Environmental Policies: Model Structure.”

Mas-Colell, Andreu, Michael D. Whinston, and Jerry R. Green (1995) *Microeconomic Theory*, New York: Oxford University Press.

Simon, Carl P. and Lawrence Blume (1994) *Mathematics for Economists*, New York: W. W. Norton Company.

Takeda, Shiro (2007) “The Double Dividend from Carbon Regulations in Japan,” *Journal of the Japanese and International Economies*, Vol. 21, No. 3, pp. 336–364, September, DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jjie.2006.01.002>.

Varian, Hal R. (1992) *Microeconomic Analysis*, New York: W. W. Norton Company, 3rd edition.

奥野正寛・鈴木興太郎 (1985) 『ミクロ経済学 I』, 岩波書店.

4 補足 (※)

4.1 生産者の行動についての補足

4.1.1 Hotelling の補題：利潤関数と生産量、投入量の関係

利潤関数を生産物の価格で偏微分したものは供給量（生産量）に等しく、利潤関数を投入物の価格で偏微分したもの（にマイナスをかけたもの）は投入量に等しいという関係がある。これを「Hotelling の補題」という¹⁵。

$$\frac{\partial \pi(p_y, \mathbf{p})}{\partial p_y} = f[\mathbf{x}(p_y, \mathbf{p})] = y(p_y, \mathbf{p}) \quad (25)$$

$$\frac{\partial \pi(p_y, \mathbf{p})}{\partial p_i} = -x_i(p_y, \mathbf{p}) \quad (26)$$

利潤関数をそのまま p_y で偏微分すれば

$$\frac{\partial \pi(p_y, \mathbf{p})}{\partial p_y} = y(p_y, \mathbf{p}) + p_y \frac{\partial y(p_y, \mathbf{p})}{\partial p_y} - \sum_i p_i \frac{\partial x_i(p_y, \mathbf{p})}{\partial p_y}$$

となるが、(25) 式はこの式の第 2 項と第 3 項が消えるということを意味している。これは「包絡線定理」を利潤関数に適用した結果である。簡単に証明できることなので以下で証明してみる。まず上の式は次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} y(p_y, \mathbf{p}) + p_y \frac{\partial y(p_y, \mathbf{p})}{\partial p_y} - \sum_i p_i \frac{\partial x_i(p_y, \mathbf{p})}{\partial p_y} \\ = y + p_y \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial p_y} - \sum_i p_i \frac{\partial x_i}{\partial p_y} = y + \sum_i \left[p_y \frac{\partial f}{\partial x_i} - p_i \right] \frac{\partial x_i}{\partial p_y} \end{aligned}$$

ここで最後の [] 内は (4) 式の利潤最大化条件より 0 となる。よって、(25) 式が成立する。(26) 式も全く同じように証明できる。利潤関数が与えられれば Hotelling の補題を使うことで供給関数、投入需要関数を求めることができるということである。

4.1.2 Shephard の補題：費用関数と投入需要関数の関係

Hotelling の補題により利潤関数から生産量、投入量を導いたように、Shephard の補題により（単位）費用関数から（単位）投入量を導出できる。

[Shephard の補題]

$$\frac{\partial c(\mathbf{p})}{\partial p_i} = z_i(\mathbf{p}) \quad (27)$$

証明は Hotelling の補題のケースと全く同じようにすればよい。一度、（単位）費用関数がわかれば Shephard の補題を利用することで（単位）投入量を求めることができる。総投入量はこの単位投入量に生産量を掛け合わせた量 $z_i(\mathbf{p})y$ となる。

¹⁵ Hotelling の補題については、例えば、Varian (1992, p.43), Mas-Colell et al. (1995, p.138) を参照されたい。

生産関数が (9) 式であるときに、実際に Shephard の補題が成り立つかを見てみよう。生産関数が (9) 式であるとき、単位費用関数は (14) 式となる。この (14) 式を投入物価格 p_i で偏微分すると

$$\frac{\partial c(\mathbf{p})}{\partial p_i} = \frac{1}{1-\sigma} \left[\sum_i \beta_j^\sigma p_j^{1-\sigma} \right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \beta_i (1-\sigma) p_i^{-\sigma} = \left[\frac{\beta_i}{p_i} \right]^\sigma \left[\sum_i \beta_j^\sigma p_j^{1-\sigma} \right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}$$

となる。右辺は (13) 式の単位投入需要関数に等しくなっている。よって、Shephard の補題が成り立っていることがわかる。

4.2 CES 関数の代替の弾力性

(8) 式の関数は「CES (constant elasticity of substitution) 関数」と呼ばれるが、本当に代替の弾力性が σ に等しくなるか計算してみよう。まず、投入物 i と投入物 j の (技術的) 限界代替率は次のように定義される

$$\text{MRS}_{ij} \Big|_{y=\bar{y}} = -\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{f_i(\mathbf{x})}{f_j(\mathbf{x})}$$

ただし、 $f_i \equiv \partial f / \partial x_i$ である。

代替の弾力性 ε_{ji} は限界代替率を利用して次のように定義される。

$$\varepsilon_{ji} \equiv \frac{d \ln(x_j/x_i)}{d \ln \text{MRS}_{ij}} = \frac{\frac{d(x_j/x_i)}{x_j/x_i}}{\frac{d \text{MRS}_{ij}}{\text{MRS}_{ij}}} \quad (28)$$

この定義からわかるように代替の弾力性とは限界代替率が 1% 変化したときに、それに対応する投入比率が何% 変化するかを表している¹⁶。これが実際に σ に等しくなるか確認しよう。まず、限界代替率を求める。

$$f_i(\mathbf{x}) = \frac{\sigma}{\sigma-1} \left[\sum_j \beta_j (x_j)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{1}{\sigma-1}} \beta_i \frac{\sigma-1}{\sigma} (x_i)^{-\frac{1}{\sigma}} = \left[\sum_j \beta_j (x_j)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{1}{\sigma-1}} \beta_i (x_i)^{-\frac{1}{\sigma}}$$

であるので、限界代替率は次式となる。

$$\text{MRS}_{ij} = \frac{f_i(\mathbf{x})}{f_j(\mathbf{x})} = \frac{\beta_i}{\beta_j} \left[\frac{x_j}{x_i} \right]^{\frac{1}{\sigma}}$$

この対数をとって書き換えると

$$\begin{aligned} \ln \text{MRS}_{ij} &= \ln \beta_i - \ln \beta_j + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{x_j}{x_i} \\ \frac{d \ln \text{MRS}_{ij}}{d \ln(x_j/x_i)} &= \frac{1}{\sigma} \end{aligned}$$

となる。これより

$$\varepsilon_{ji} = \frac{d \ln(x_j/x_i)}{d \ln \text{MRS}(ij)} = \sigma$$

¹⁶ もちろん厳密には、1% という離散的な変化ではなく微小な変化に対して定義されている。

を得る。生産関数が (9) 式の CES 関数であるときには、代替の弾力性がパラメータ σ に等しくなることが確認できる。

[代替の弾力性の意味]

代替の弾力性の元々の定義は (28) である。しかし、(4) 式の利潤最大化の条件、あるいは (5) 式の費用最小化の条件より

$$\text{MRS}_{ij} = \frac{f_i(\mathbf{x})}{f_j(\mathbf{x})} = \frac{p_i}{p_j}$$

が成り立つ。これは生産者が利潤最大化（費用最小化）をしている状況では、限界代替率と投入物の価格比率は等しいということを意味する。この関係を利用すると代替の弾力性は次のように書き換えることができる。

$$\varepsilon_{ji} = \frac{d \ln(x_j/x_i)}{d \ln(p_i/p_j)}$$

つまり、代替の弾力性とは投入物の価格比率が 1% 変化したときに、投入比率が何% 変化するかを表す数値ということになる¹⁷。

4.3 消費者の行動についての補足

4.3.1 Roy の恒等式

間接効用関数と非補償需要関数の間には「Roy の恒等式」という関係がある。Roy の恒等式より間接効用関数がわかればそこから非補償需要関数を導出することができる。

$$d_i(\mathbf{p}, m) = - \frac{\frac{\partial v(\mathbf{p}, m)}{\partial p_i}}{\frac{\partial v(\mathbf{p}, m)}{\partial m}}$$

この Roy の恒等式を証明してみる。まず、(17) 式から右辺を普通に計算すると

$$\frac{\partial v(\mathbf{p}, m)}{\partial p_i} = \sum_j \frac{\partial g}{\partial d_j} \frac{\partial d_j}{\partial p_i} \quad (29)$$

$$\frac{\partial v(\mathbf{p}, m)}{\partial m} = \sum_j \frac{\partial g}{\partial d_j} \frac{\partial d_j}{\partial m} \quad (30)$$

となる。ここで (15) 式を用いると

$$\frac{\partial v(\mathbf{p}, m)}{\partial p_i} = \lambda \sum_j p_j \frac{\partial d_j}{\partial p_i} \quad (31)$$

$$\frac{\partial v(\mathbf{p}, m)}{\partial m} = \lambda \sum_j p_j \frac{\partial d_j}{\partial m} \quad (32)$$

となる。さらに、(16) 式の関係から

$$\sum_j p_j \frac{\partial d_j}{\partial p_i} + d_i = 0$$

¹⁷脚注 16 で説明したように、厳密には微小な変化に対してのみ成り立つ。

$$\sum_j p_j \frac{\partial d_j}{\partial m} = 1$$

が成り立つ。この二つを (31)、(32) 式に代入すれば

$$-\frac{\frac{\partial v(\mathbf{p}, m)}{\partial p_i}}{\frac{\partial v(\mathbf{p}, m)}{\partial m}} = -\frac{-d_i(\mathbf{p}, m)}{1} = d_i(\mathbf{p}, m)$$

となる。(証明終わり)

4.3.2 効用最大化行動と支出最小化行動の関係

支出関数と間接効用関数の間には以下のような関係が存在する。¹⁸

$$v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) = u \quad (33)$$

$$e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m)) = m \quad (34)$$

(33) 式の意味

- ある価格と効用水準の組み合わせが与えられたとする。それを (\mathbf{p}^*, u^*) と表す。
- その価格と効用水準の下で支出最小化を図る消費者が実現する最小支出額は $e^* = e(\mathbf{p}^*, u^*)$ となる。
- (33) 式は、その e^* を所得として \mathbf{p}^* という価格の下で効用最大化を図る消費者の得る効用水準 $v^* = v(\mathbf{p}^*, e^*)$ が元々の効用水準 u^* に等しくなるということである。

(34) 式の意味

- ある価格と所得の組み合わせが与えられたとする。それを (\mathbf{p}^*, m^*) と表す。
- その価格と所得の下で効用最大化を図る消費者が得る効用水準は $v^* = v(\mathbf{p}^*, m^*)$ となる。
- (34) 式は、その v^* と \mathbf{p}^* の下で支出最小化を図る消費者が実現する最小支出額 $e^* = e(\mathbf{p}^*, v^*)$ が元々の所得額 m^* に等しくなるということである。

同じように非補償需要関数と補償需要関数の間に次の関係が成り立つ。

$$d_i(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) = h_i(\mathbf{p}, u) \quad (35)$$

$$h_i(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m)) = d_i(\mathbf{p}, m) \quad (36)$$

(35) 式からは「スルツキー方程式 (Slutsky equation)」を導くことができる。

4.3.3 支出関数についての Shephard の補題

支出関数に関しても費用関数と同様に、次の Shephard の補題が成り立つ。

$$\frac{\partial e(\mathbf{p}, u)}{\partial p_i} = h_i(\mathbf{p}, u)$$

¹⁸Mas-Colell et al. (1995, pp. 60-62)、?, p.192。

5 問題

問題 1: (35) 式から Slutsky 方程式を導出しなさい。Slutsky 方程式とは p_j の上昇に対する $d_i(\mathbf{p}, m)$ の変化の効果を代替効果と所得効果に分解した式のことである。

問題 2: 効用関数が次式のような Cobb-Douglas 型関数であるとする。

$$u = g(\mathbf{d}) = \phi \prod_i (d_i)^{\alpha_i}$$

3.3 節を参考にして、このときの間接効用関数を求めなさい。

問題 3: 4.1.1 節を参考にして、費用最小化の条件を基に Shephard の補題 (27) 式が成り立つことを証明しなさい。

問題 4: (24) 式を p_i で偏微分すると (23) 式となることを確認しなさい。

6 履歴

- 2018-07-20: 説明の追加・修正。
- 2017-03-15: 説明の修正。
- 2016-04-12: 2.1 節に「最大化（最適化）の条件についての注」を追加。
- 2016-04-04: 2.1.2 節の「ゼロ利潤について注」、「資本の利用に対する支払い」についての説明を追加。
- 2015-02-06: 等価変分、補償変分の説明を追加