CES 関数の calibrated share form

武田史郎

京都産業大学経済学部

2012/07/16

内容

1. 導入

CGE 分析などのシミュレーションにおいては、生産関数、効用関数として CES 関数が採用されていることが多い。その CES 関数を表現する際に calibrated share form という形式が利用されることがある。本稿では、その CES 関数の calibrated share form について説明をおこなう。まずはじめに、通常の CES 関数（normal form の CES 関数）によってモデルを記述し、その後、calibrated share form を紹介する。なお、本稿以外に calibrated share form を説明している文献としては Rutherford (1998)がある。

2. Normal form の CES 関数

以下では、生産関数が CES 関数であるケースを例にとって説明をおこなう[1]。qを生産量、y_iを投入物 $i=1,\cdots,I$ の投入量とすると、生産関数は次式のように表現される。

$$q=f(\{y_i\})=\phi\left[\sum_i \alpha_i\,(y_i)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

ただし、$\sum_i \alpha_i=1$ である。上式において、スケールパラメータ ϕ を括弧内に入れることで、以下のように書き換えることができる。

$$q=\left[\sum_i \beta_i(y_i)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{1}$$

ただし、

$$\beta_i=(\phi)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\alpha_i$$

である。以下では、パラメータ β_i をウェイト・パラメータと呼ぶことにする。

投入物の価格ベクトルを $\mathrm{p}=\{p_1,\cdots,p_I\}$ とすると、(1) 式より単位費用関数を定義することができる。

$$c(\mathrm{p})\equiv\min\left[\sum_i p_i x_i \middle| f(\{x_i\})=1\right]=\left[\sum_i(\beta_i)^{\sigma}(p_i)^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \tag{2}$$

x_i は単位投入量である。

Shepard の補題を使えば、単位費用関数から条件付き単位需要関数（生産量 1 単位当たりの投入需要）を求めることができる[2]。

$$x_i=\frac{\partial c(\mathrm{p})}{\partial p_i}=\left[\frac{\beta_i}{p_i}\left(\sum_j(\beta_j)^{\sigma}(p_j)^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}\right]^{\sigma}=\left[\frac{\beta_i c}{p_i}\right]^{\sigma} \tag{3}$$

3.　パラメータのカリブレーション

シミュレーションをおこなうには、生産関数（単位費用関数、単位需要関数）に含まれているパラメータを特定化する必要がある。生産関数が CES 関数であるときには、特定化すべきパラメータとして次の二つがある。

1.　代替の弾力性 σ,

2.　ウェイト・パラメータ $\{\beta_i\}$.

CGE 分析では、この二つのうち代替の弾力性は外生的に与え、ウェイト・パラメータをカリブレートするという方法がとられることが多い[3]。以下でも、代替の弾力性が外生的に与えられ

[1]CES 型の効用関数についても全く同じ手法を適用できる。
[2]費用関数、条件付き需要関数、Shepard の補題については、例えば奥野・鈴村 (1985)、Mas-Colell, Whinston and Green (1995,Chap.5) を参照して欲しい。
[3]代替の弾力性も カリブレートされるケースがあるが、その場合でもウェイト・パラメータのカリブレートの方法は変わらない。

ているものとして議論を進める。カリブレート（calibrate）とは、与えられたベンチマークデータが均衡条件を満たすようにパラメータの値を決定するという方法である[4]。具体的には以下のような手順でおこなわれる。

まず、ベンチマークにおける単位投入量、投入物の価格を $\bar{x}_i$、 $\bar{p}_i$ とする。ベンチマークの単位費用は $\bar{c} = \sum_i \bar{p}_i \bar{x}_i$ となる。ベンチマークデータが均衡条件を満たすとするなら、ベンチマークデータのもとで生産者は費用最小化をしていなければならない。よって、ベンチマークデータは条件付き単位需要関数(3)を満たしていなければならない。

$$\bar{x}_i = \left[\frac{\beta_i \bar{c}}{\bar{p}_i}\right]^{\sigma} \tag{4}$$

ここで、代替の弾力性 σ は外生的に与えられているので、(4) 式をウェイト・パラメータ β_i について解くことができる。

$$\beta_i = \frac{\bar{p}_i \bar{x}_i^{\frac{1}{\sigma}}}{\bar{c}} = \theta_i [\bar{x}_i]^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \tag{5}$$

$$\theta \equiv \frac{\bar{p}_i \bar{x}_i}{\bar{c}} = \frac{\bar{p}_i \bar{y}_i}{\bar{c}\bar{q}}$$

θ_i はベンチマークにおける投入物 i の投入シェアである。以上のように、ベンチマークデータが均衡条件を満たしているという仮定を置くことで、ウェイト・パラメータを決定することができる。

シミュレーションをおこなう際には、まず (5) によって β_i をカリブレートし、その値を生産関数、費用関数に代入することで関数を完全に特定化することができる。

仮に生産関数が

$$q = \phi \left[\sum_i \alpha_i (y_i)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

というようにϕとα_iという二種類のパラメータで表現されているときには、$\beta_i = \phi^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \alpha_i$という関係があることから

$$\phi = \left(\sum_i \theta_i (\bar{x}_i)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{6}$$

$$\alpha_i = \frac{\theta_i (\bar{x}_i)^{\frac{(1-\sigma)}{\sigma}}}{\sum_j \theta_j \left(\bar{x}_j\right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}} \tag{7}$$

という関係によってカリブレートできる。

4. CES関数の calibrated share form

前節で述べたようにシミュレーションをおこなう際には、まずウェイト・パラメータ β_i をカリブレートし、それを生産関数、費用関数に代入すればよいのであるが、その方法ではウェ

[4] ここでの「カリブレート（カリブレーション）」は CGE 分析での意味である。他の分野、例えばマクロ経済学等でもカリブレートという用語が利用されているが、それらの文脈とは異なった意味を持っているかもしれないので注意。

イト・パラメータをカリブレートするためのプログラムを別途に作成しなければならない。シミュレーションにおいて様々な型の CES 関数を同時に用いている場合には、これが非常に繁雑な作業となりうる。Calibrated share form は別途にウェイト・パラメータのカリブレートをおこなわずに CES 関数を表現する方法である。

Calibrated share form はウェイト・パラメータ β_i に、そのカリブレートされた値を代入したもののことである。例えば、calibrated share form の生産関数を求めるには、元の生産関数 (1) の β_i に (5) を代入してやればよい。

$$q=\left[\sum_i \theta_i\left(\frac{\bar{y}_i}{\bar{q}}\right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}(y_i)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}=\bar{q}\left[\sum_i \theta_i\left(\frac{y_i}{\bar{y}_i}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{8}$$

同様に、Calibrated share form の単位費用関数は (2) に (5) を代入することで求められる。

$$c=\left[\sum_i \left(\theta_i(\bar{x}_i)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\right)^{\sigma}(p_i)^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}=\bar{c}\left[\sum_i \theta_i\left(\frac{p_i}{\bar{p}_i}\right)^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \tag{9}$$

さらに、calibrated share form の条件付き単位需要を求めるには、(3) に (5) を代入すればよい。

$$x_i=\left[\frac{\theta_i(\bar{x}_i)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}c}{p_i}\right]^{\sigma}=\bar{x}_i\left[\frac{c/\bar{c}}{p_i/\bar{p}_i}\right]^{\sigma} \tag{10}$$

(9)－(10) のどの関数でも、代入によって β_i が消去されているので、β_i を別途にカリブレートする必要はなくなっている[5]。よって、シミュレーションのプログラムも、より簡潔なもので済むのである。

5. Cobb-Douglas 関数

前節では CES 関数の calibrated share form を見たが、同じことを Cobb-Douglas 関数にも適用することができる。

5.1. Normal form

生産関数は以下の Cobb-Douglas 関数とする。

$$q=\phi\prod_i (y_i)^{\alpha_i} \tag{11}$$

ただし、$\sum_i \alpha_i=1$ である。

(11) より、単位費用関数、単位需要関数は次式となる。

$$c(\mathrm{p})=\frac{1}{\phi}\prod_i \left[\frac{p_i}{\alpha_i}\right]^{\alpha_i} \tag{12}$$

$$x_i=\frac{\partial c(\mathrm{p})}{\partial p_i}=\frac{\alpha_i}{p_i}\frac{1}{\phi}\prod_j \left[\frac{p_j}{\alpha_j}\right]^{\alpha_j}=\frac{\alpha_i c}{p_i} \tag{13}$$

[5]ただし、calibrated share form でもベンチマークにおける投入シェア θ_i は事前に求めておかなければならない。

5.2.　カリブレーション

Cobb-Douglas 関数の場合には、カリブレートするパラメータは

1.　シェア・パラメータ α_i、
2.　スケール・パラメータ ϕ

である。まず、α_iは (13)からカリブレートできる。

$$\alpha_i = \frac{\bar{p}_i \bar{x}_i}{\bar{c}} = \theta_i$$

Cobb-Douglas 型の場合、パラメータ α_i は文字通り投入物 i の投入シェアに等しいことがわかる。

α_i が決まれば、(11) からスケール・パラメータ ϕ がカリブレートできる。

$$\phi = \frac{\bar{q}}{\prod_i (\bar{y}_i)^{\theta_i}} \tag{14}$$

5.3.　Calibrated share form

再び、カリブレートした α_i、ϕ の値を生産関数、費用関数、需要関数に代入することで calibrated share form を求める。まず、生産関数は次式となる。

$$q = \frac{\bar{q}}{\prod_i (\bar{y}_i)^{\theta_i}} \prod_i (y_i)^{\theta_i} = \bar{q} \prod_i \left[\frac{y_i}{\bar{y}_i}\right]^{\theta_i} \tag{15}$$

同様に、単位費用関数は次式となる。

$$c = \frac{\prod_i (\bar{y}_i)^{\theta_i}}{\bar{q}} \prod_i \left[\frac{p_i}{\theta_i}\right]^{\theta_i} = \bar{c} \prod_i \left[\frac{p_i}{\bar{p}_i}\right]^{\theta_i} \tag{16}$$

単位需要関数については、CES 関数のケースの単位需要 (10) において、代替の弾力性を 1 と置いたものに等しくなる。

$$x_i = \frac{\theta_i c}{p_i} = \bar{x}_i \frac{c/\bar{c}}{p_i/\bar{p}_i}$$

6.　技術進歩

CES 生産関数で技術水準のパラメータが入るケース。

生産関数；

$$q = \left[\sum_i \beta_i (\lambda_i y_i)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

λ_i は技術水準パラメータ (λ_i のベンチマーク値は 1 とする)。

単位費用関数；

$$c(\mathrm{p}) = \left[\sum_i (\beta_i)^\sigma \left[\frac{p_i}{\lambda_i}\right]^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

単位需要関数；

$$x_i(\mathrm{p}) = \frac{1}{\lambda_i}\left[\frac{\beta_i\lambda_i c}{p_i}\right]^\sigma = \frac{1}{\lambda_i}\left[\frac{\beta_i\lambda_i}{p_i}\right]^\sigma \left[\sum_j \beta_j^\sigma \left(\frac{p_i}{\lambda_i}\right)^{1-\sigma}\right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}$$

単位費用関数の Calibrated-share form:

$$c = \bar{c}\left[\sum_i \theta_i \left[\frac{p_i}{\lambda_i \bar{p}_i}\right]^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

単位需要関数の calibrated-share form:

$$x_i = \frac{\bar{x}_i}{\lambda_i}\left[\frac{\mathrm{c}/\bar{\mathrm{c}}}{p/(\bar{p}\lambda_i)}\right]^\sigma$$

7. まとめ

これまでの結果をまとめて記しておこう。

7.1. CES関数

7.1.1. Normal form

$$q = \left[\sum_i \beta_i (y_i)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

$$c(\mathrm{p}) = \left[\sum_i (\beta_i)^\sigma (p_i)^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

$$x_i = \left[\frac{\beta_i c}{p_i}\right]^\sigma$$

7.1.2. カリブレートされたパラメータ

$$\beta_i = \frac{\bar{p}_i \bar{y}_i}{\bar{c}\bar{y}}$$

7.1.3. Calibrated share form

$$q = \bar{q}\left[\sum_i \theta_i \left(\frac{y_i}{\bar{y}_i}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

$$c = \bar{c}\left[\sum_i \theta_i \left(\frac{p_i}{\bar{p}_i}\right)^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

$$x_i = \bar{x}_i \left[\frac{c/\bar{c}}{p_i/\bar{p}_i}\right]^\sigma$$

7.2. Cobb-Douglas 関数

7.2.1. Normal form

$$q = \phi \prod_i (y_i)^{\alpha_i}$$
$$c(\mathrm{p}) = \frac{1}{\phi} \prod_i \left[\frac{p_i}{\alpha_i}\right]^{\alpha_i}$$
$$x_i = \frac{\partial c(\mathrm{p})}{\partial p_i} = \frac{\alpha_i}{p_i} \frac{1}{\phi} \prod_j \left[\frac{p_j}{\alpha_j}\right]^{\alpha_j} = \frac{\alpha_i c}{p_i}$$

7.2.2. カリブレートされたパラメータ

$$\alpha_i = \theta_i$$
$$\phi = \frac{\bar{q}}{\prod_i (\bar{y}_i)^{\theta_i}}$$

7.2.3. Calibrated share form

$$q = \bar{q} \prod_i \left[\frac{y_i}{\bar{y}_i}\right]^{\theta_i}$$
$$c = \bar{c} \prod_i \left[\frac{p_i}{\bar{p}_i}\right]^{\theta_i}$$
$$x_i = \frac{\theta_i c}{p_i} = \bar{x}_i \frac{c/\bar{c}}{p_i/\bar{p}_i}$$

サンプルのプログラムも参照。

参考文献

Mas-Colell,Andreu,Michael D.Whinston,and Jerry R.Green (1995) Microeconomic Theory, New York: Oxford University Press.

Rutherford, Thomas F.(1998) "CES Preferences and Technology: A Practical Introduction." in "Economic Equilibrium Modeling with GAMS: An Introduction to GAMS/MCP and GAMS/MPSGE (GAMS/MPSGE Solver Manual)", pp.89-115, (available at: http://www.gams.com/docs/solver/mpsge.pdf).

奥野正寛・鈴村興太郎(1985)『ミクロ経済学 I 』，岩波書店．モダン・エコノミクス 1